Lista 1 – Preparação para Prova 1

Econometria II – UFBA | Prof. Pablo Castro

Instruções. Resolva no papel, mostrando todas as contas. Use sempre que possível o operador defasagem L. Notação padrão: $\{\varepsilon_t\}$ é ruído branco com $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ e $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$; $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})$; $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$.

Questão 1. *(Conceitos – V/F com justificativa, 5 itens).*

Classifique cada afirmação como Verdadeira ou Falsa e **justifique em uma ou duas linhas**.

(a) Um ruído branco com $\sigma^2 = 1$ tem $\rho(k) = 0$ para todo $k \neq 0$, mas pode apresentar $\rho(k) \neq 0$ para algum k se a distribuição não for normal.

(b) Se as raízes do polinômio característico de um processo AR(p) estão *dentro* do círculo unitário, o processo é estacionário.

(c) Um processo MA(q) é **sempre** fracamente estacionário, independentemente dos coeficientes (desde que finitos).

(d) Um passeio aleatório $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ é estacionário em **primeira diferença**.

(e) Em um processo ARMA(p, q), a estacionariedade depende dos coeficientes da parte AR **e** da parte MA – para concluir se o processo é estacionário precisamos verificar todos eles.

Questão 2. *(Polinômio característico).*

Para cada processo abaixo, escreva o polinômio característico associado, encontre suas raízes e diga se o processo é estacionário.

(a) $y_t = 0{,}7\, y_{t-1} + \varepsilon_t$

(b) $y_t = 1{,}2\, y_{t-1} - 0{,}35\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

(c) $y_t = 0{,}5\, y_{t-1} + 0{,}6\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

(d) $y_t = 1{,}0\, y_{t-1} - 0{,}25\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

Dica: use a forma $\phi(L)y_t = \varepsilon_t$ e estude as raízes de $\phi(z) = 0$ (estacionariedade $\Leftrightarrow$ todas as raízes **fora** do círculo unitário).

Questão 3. *(MA(2): momentos e autocovariâncias).*

Receita geral para cálculo de momentos (vale para esta e as próximas duas questões, Q3, Q4 e Q5). Para obter $\mathbb{E}[y_t]$, $\mathrm{Var}(y_t)$ e $\gamma(k)$ *a partir da equação do processo*:

(i) **Esperança $\mathbb{E}[y_t]$:** tome esperança da equação dos dois lados.

(ii) **Variância $\gamma(0) = \mathrm{Var}(y_t)$:** use a fórmula $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$. Quando $\mathbb{E}[y_t] = 0$ (o caso usual), isso simplifica para $\mathrm{Var}(y_t) = \mathbb{E}[y_t^2]$ – então eleve y_t ao quadrado, expanda e tome esperança.

(iii) **Autocovariância $\gamma(k)$, $k \geq 1$:** multiplique a equação por y_{t-k} e tome esperança (lembre que $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \mathbb{E}[y_t y_{t-k}] - \mathbb{E}[y_t]\,\mathbb{E}[y_{t-k}]$, que com média zero vira $\mathbb{E}[y_t y_{t-k}]$).

(iv) **Propriedades do ruído branco:** $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$ se $t \neq s$, e $\mathbb{E}[\varepsilon_t y_{t-k}] = 0$ para todo $k \geq 1$ (pois y_{t-k} é função apenas de inovações anteriores a ε_t).

Considere o processo

$$y_t \;=\; \varepsilon_t \;+\; 0{,}8\,\varepsilon_{t-1} \;-\; 0{,}3\,\varepsilon_{t-2}, \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0,\sigma^2).$$

Calcule:

(a) $\mathbb{E}[y_t]$ e $\mathrm{Var}(y_t) = \gamma(0)$;

(b) $\gamma(1)$, $\gamma(2)$, $\gamma(3)$ e $\gamma(k)$ para $k \geq 3$;

(c) as autocorrelações $\rho(1)$, $\rho(2)$;

(d) explique **em uma frase** por que $\gamma(k) = 0$ para $k > q$ em qualquer $\mathrm{MA}(q)$.

Questão 4. *(MA com "memória curta").*
Considere o processo

$$x_t \;=\; \varepsilon_t \;+\; \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{t-1} \;+\; \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_{t-2}, \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0,1).$$

(a) Calcule $\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \gamma(3), \gamma(4)$ e descreva $\gamma(k)$ para $k \geq 3$.

Questão 5. *(AR(1): momentos e decaimento da autocovariância).*
Seja

$$y_t \;=\; \mu \;+\; \phi\, y_{t-1} \;+\; \varepsilon_t, \qquad |\phi| < 1, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0,\sigma^2).$$

(a) Mostre que $\mathbb{E}[y_t] = \mu/(1-\phi)$ e que $\mathrm{Var}(y_t) = \sigma^2/(1-\phi^2)$.

(b) Calcule $\gamma(1), \gamma(2)$ e dê uma fórmula geral para $\gamma(k)$, $k \geq 0$.

Questão 6. *(Classificação).*
Identifique cada processo abaixo como **AR**(p)**,** **MA**(q)**,** **ARMA**(p,q)**,** **ARIMA**(p,d,q) ou **SARIMA**$(p,d,q)(P,D,Q)_m$, indicando *todas* as ordens (p,d,q) ou $(p,d,q)(P,D,Q)_m$ quando aplicável.

(a) $y_t = 0{,}6\,y_{t-1} + \varepsilon_t$

(b) $y_t = \varepsilon_t + 0{,}5\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}2\,\varepsilon_{t-3}$

(c) $y_t = 0{,}9\,y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}4\,\varepsilon_{t-1}$

(d) $\Delta y_t = 0{,}3\,\Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$

(e) $(1-L)(1-L^{12})\,y_t = (1+0{,}5L)(1+0{,}3L^{12})\,\varepsilon_t$

(f) $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ *(passeio aleatório)*

Questão 7. *(Passeio aleatório não é estacionário).*
Seja $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, com $y_0 = 0$ e $\varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0,\sigma^2)$.

(a) Escreva y_t como $\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$.

(b) Calcule $\mathbb{E}[y_t]$ e $\mathrm{Var}(y_t)$. O que acontece com $\mathrm{Var}(y_t)$ quando $t \to \infty$?

(c) Calcule $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})$ e mostre que ela depende de t (não só de k).

(d) Conclua: o passeio aleatório viola *qual* das condições de estacionariedade fraca?

Questão 8. *(Tendência determinística vs estocástica).*
Considere dois processos:

$$\text{(A)}\;\; y_t = a + b\,t + u_t, \quad u_t \sim \mathrm{RB}(0,\sigma^2) \qquad \text{(B)}\;\; y_t = b + y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

(a) Em qual deles a tendência é **determinística**? Em qual é **estocástica**?

(b) Um choque ε_t tem efeito **temporário** ou **permanente** em cada caso?

(c) Para tornar cada um estacionário, o procedimento correto é remover a tendência via regressão em t ("*detrending*") ou tomar primeira diferença? Justifique.

(d) Qual é a hipótese nula do teste de Dickey-Fuller, e qual é a alternativa? Em qual dos dois processos acima a hipótese nula é **rejeitada**?

Questão 9. *(Filtro Hodrick-Prescott).*

O filtro HP escolhe a tendência $\gamma_1, \dots, \gamma_T$ que minimiza

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t - \gamma_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(\gamma_{t+1} - \gamma_t) - (\gamma_t - \gamma_{t-1})\right]^2.$$

(a) O que significa, **intuitivamente**, $\lambda = 0$? E $\lambda \to \infty$? Como é a tendência em cada caso?

(b) Por que, para PIB trimestral, se costuma usar $\lambda = 1600$ enquanto para PIB anual se usa $\lambda = 6{,}25$ (ou 100)? Por que valores tão diferentes?

(c) *Conta no papel.* Considere $T = 3$ observações $y_1 = 2,\ y_2 = 5,\ y_3 = 4$ e $\lambda = 1$. O problema HP se reduz a minimizar

$$F(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (2-\gamma_1)^2 + (5-\gamma_2)^2 + (4-\gamma_3)^2 + 1 \cdot \left[(\gamma_3 - \gamma_2) - (\gamma_2 - \gamma_1)\right]^2.$$

Derive as condições de primeira ordem e resolva o sistema linear para encontrar $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Questão 10. *(Pesos determinísticos vs aleatórios).*

Seja $\varepsilon_t \sim$ i.i.d. $N(0,1)$. Defina três processos:

$$A_t = \varepsilon_t, \qquad B_t = c_t\,\varepsilon_t,\ \ c_t = \begin{cases} 1, & t \text{ par}, \\ 3, & t \text{ ímpar}, \end{cases} \qquad C_t = D_t\,\varepsilon_t,$$

onde $\{D_t\}$ é uma sequência i.i.d. que assume os valores 1 e 3 com probabilidade 1/2 cada, **independente** de $\{\varepsilon_t\}$.

(a) Mostre que $\{A_t\}$ é fracamente estacionário.

(b) Calcule $\mathrm{Var}(B_t)$ para t par e para t ímpar. Conclua que $\{B_t\}$ **não** é fracamente estacionário.

(c) Calcule $\mathbb{E}[C_t]$, $\mathrm{Var}(C_t)$ e $\mathrm{Cov}(C_t, C_{t-k})$ para $k \geq 0$. Conclua que $\{C_t\}$ **é** fracamente estacionário.

(d) Tanto B_t quanto C_t multiplicam ε_t por um peso que pode valer 1 ou 3 – ou seja, têm o *mesmo conjunto de valores possíveis* para o peso. Por que um é estacionário e o outro não? Em uma frase, identifique a **diferença fundamental** entre os dois mecanismos de geração dos pesos.

Questão 11. *(Mistura aleatória de duas representações MA(1)).*

Sejam $\{\varepsilon_t\}$ i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ e $\{\pi_t\}$ uma sequência i.i.d. Bernoulli(1/2), **independente** de $\{\varepsilon_t\}$. Fixe os dois coeficientes $\alpha = 1/2$ e $\beta = -1/3$. Defina

$$y_t \;=\; \begin{cases} \varepsilon_t + \alpha\,\varepsilon_{t-1}, & \text{se } \pi_t = 1, \\ \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}, & \text{se } \pi_t = 0. \end{cases}$$

Note que *cada ramo isolado* é um MA(1) bem definido (estacionário). O processo $\{y_t\}$ alterna aleatoriamente entre os dois ramos.

(a) Calcule $\mathbb{E}[y_t]$.

(b) Calcule $\mathrm{Var}(y_t) = \gamma(0)$. *Dica:* defina o coeficiente do período $a_t \in \{\alpha, \beta\}$ (com probabilidade $1/2$ cada, independente de ε) e mostre que $\mathrm{Var}(y_t) = \sigma^2 + \mathbb{E}[a_t^2]\,\sigma^2$.

(c) Calcule $\gamma(1) = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1})$ e $\gamma(k)$ para $k \geq 2$.

(d) Justifique que $\{y_t\}$ é fracamente estacionário, mostrando que $\mathbb{E}[y_t]$, $\mathrm{Var}(y_t)$ e $\gamma(k)$ não dependem de t.

(e) **Intuição.** Em uma ou duas frases, explique por que uma mistura i.i.d. de processos estacionários (com os pesos π_t independentes do ruído) preserva a estacionariedade – e contraste com a Q10.