

Gabarito – Lista 2

Econometria II – UFBA | Prof. Pablo Castro

Este gabarito é também uma ferramenta de estudo: as derivações estão escritas passo a passo. Acompanhe cada passo refazendo no papel.

Gabarito Questão 1. (Cálculo da ACF e PACF – AR(2) e MA(2))

((a)) ACF do AR(2) – roteiro idêntico ao dos slides do Cap. 4.

O processo é $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$, com $\mathbb{E}[y_t] = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ e ε_t independente de $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

Passo 1 – calcular $\gamma_0 = \text{Var}(y_t)$.

Aplicamos variância em $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$. Como y_{t-1}, y_{t-2} e ε_t são mutuamente não correlacionados:

$$\text{Var}(y_t) = \phi_1^2 \text{Var}(y_{t-1}) + \phi_2^2 \text{Var}(y_{t-2}) + 2\phi_1\phi_2 \underbrace{\text{Cov}(y_{t-1}, y_{t-2})}_{=\gamma_1} + \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_t)}_{=\sigma^2}.$$

Usando estacionariedade ($\text{Var}(y_t) = \text{Var}(y_{t-1}) = \text{Var}(y_{t-2}) = \gamma_0$):

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + 2\phi_1\phi_2 \gamma_1 + \sigma^2.$$

Essa equação relaciona γ_0 e γ_1 ; precisamos de uma segunda para resolver o sistema. A equação abaixo (Passo 2) vai nos dar a relação geral.

Passo 2 – calcular $\gamma_k = \mathbb{E}[y_t y_{t-k}]$ para $k \geq 1$.

Como $\mathbb{E}[y_t] = 0$, temos $\gamma_k = \mathbb{E}[y_t y_{t-k}]$. Substituímos y_t pela sua equação:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \mathbb{E}[(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t) y_{t-k}] \\ &= \phi_1 \underbrace{\mathbb{E}[y_{t-1} y_{t-k}]}_{=\gamma_{k-1}} + \phi_2 \underbrace{\mathbb{E}[y_{t-2} y_{t-k}]}_{=\gamma_{k-2}} + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t y_{t-k}]}_{=0 \text{ } (\varepsilon_t \text{ não depende do passado})}. \end{aligned}$$

Resultado: para $k \geq 1$,

$$\boxed{\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}.$$

Esta é a **recursão de Yule-Walker** para as autocovariâncias do AR(2).

Passo 3 – dividir por γ_0 para obter a ACF.

Dividindo ambos os lados por γ_0 e usando $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$:

$$\boxed{\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k \geq 1, \quad \rho_0 = 1.}$$

A ACF satisfaz a mesma recursão de 2ª ordem que o próprio AR(2)!

Passo 4 – obter ρ_1 e ρ_2 explicitamente.

Para $k = 1$: $\rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_{-1}$. Usamos $\rho_0 = 1$ e a simetria da ACF $\rho_{-1} = \rho_1$:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \implies \rho_1(1 - \phi_2) = \phi_1 \implies \boxed{\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}.$$

Para $k = 2$: $\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$. Substituindo ρ_1 :

$$\boxed{\rho_2 = \phi_2 + \phi_1 \rho_1.}$$

Para $k \geq 3$: basta aplicar a recursão $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$.

Valores numéricos para $\phi_1 = 1,0$, $\phi_2 = -0,5$:

$$\rho_1 = \frac{1,0}{1 - (-0,5)} = \frac{1,0}{1,5} \approx 0,667.$$

$$\rho_2 = -0,5 + 1,0 \times 0,667 = -0,5 + 0,667 = 0,167.$$

$$\rho_3 = 1,0 \times 0,167 + (-0,5) \times 0,667 = 0,167 - 0,333 = -0,167.$$

$$\rho_4 = 1,0 \times (-0,167) + (-0,5) \times 0,167 = -0,167 - 0,083 = -0,250.$$

Verificação do sinal: com $\phi_1 = 1,0$ e $\phi_2 = -0,5$, o polinômio característico é $1 - z - (-0,5)z^2 = 0$, ou seja $0,5z^2 - z + 1 = 0$. O discriminante é $1 - 2 = -1 < 0$: **raízes complexas**. Por isso a ACF oscila (muda de sinal periodicamente) em vez de decair monotonicamente, como seria para raízes reais.

((b)) PACF do AR(2) – sistema de Yule-Walker (Cap. 4).

Lembramos: para calcular a PACF de ordem k (ϕ_{kk}), montamos o sistema $P_k \phi_k = \rho_k$ e pegamos o **último elemento** da solução. A matriz P_k tem entrada (i, j) igual a $\rho_{|i-j|}$ e diagonal 1 ($=\rho_0$).

$k = 1$ – sistema 1×1 :

$$(1) (\phi_{11}) = (\rho_1) \implies \phi_{11} = \rho_1 \approx 0,667.$$

$k = 2$ – sistema 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}.$$

Abrindo linha a linha:

$$\text{Linha 1: } \phi_{21} + \rho_1 \phi_{22} = \rho_1.$$

$$\text{Linha 2: } \rho_1 \phi_{21} + \phi_{22} = \rho_2.$$

Isolando ϕ_{21} na Linha 1: $\phi_{21} = \rho_1 - \rho_1 \phi_{22} = \rho_1(1 - \phi_{22})$. Substituindo na Linha 2:

$$\rho_1^2(1 - \phi_{22}) + \phi_{22} = \rho_2 \implies \phi_{22}(1 - \rho_1^2) = \rho_2 - \rho_1^2 \implies \boxed{\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}}.$$

Numericamente:

$$\phi_{22} = \frac{0,167 - 0,667^2}{1 - 0,667^2} = \frac{0,167 - 0,445}{1 - 0,445} = \frac{-0,278}{0,555} = -0,500.$$

Observe: $\phi_{22} = \phi_2 = -0,5$. Isso não é coincidência – para um AR(p) puro, o sistema de YW de ordem p tem como solução exatamente os parâmetros do modelo.

$k = 3$ – sistema 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}.$$

Substituímos os valores numéricos $\rho_1 = 0,667$, $\rho_2 = 0,167$, $\rho_3 = -0,167$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,667 & 0,167 \\ 0,667 & 1 & 0,667 \\ 0,167 & 0,667 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,667 \\ 0,167 \\ -0,167 \end{pmatrix}.$$

A tentativa de solução $\phi_{31} = 1,0$, $\phi_{32} = -0,5$, $\phi_{33} = 0$ (os parâmetros do AR(2) mais um zero) satisfaz o sistema:

- Linha 1: $1(1,0) + 0,667(-0,5) + 0,167(0) = 1,0 - 0,333 = 0,667 \checkmark$
- Linha 2: $0,667(1,0) + 1(-0,5) + 0,667(0) = 0,667 - 0,5 = 0,167 \checkmark$
- Linha 3: $0,167(1,0) + 0,667(-0,5) + 1(0) = 0,167 - 0,333 = -0,167 \checkmark$

Portanto $\boxed{\phi_{33} = 0}$. O mesmo resultado se repete para qualquer $k \geq 3$.

Interpretação: a PACF do AR(2) se anula para $k \geq 3$ porque o modelo diz que y_t depende *diretamente* só de y_{t-1} e y_{t-2} . Quando controlamos por esses dois lags, o lag 3 (e além) não traz nenhuma informação extra sobre y_t .

((c)) ACF do MA(2) – roteiro dos slides.

O processo é $y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$, com $\mathbb{E}[y_t] = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ e $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ para $t \neq s$.

Passo 1 – calcular $\gamma_0 = \text{Var}(y_t)$.

Os três termos ε_t , $\theta_1 \varepsilon_{t-1}$, $\theta_2 \varepsilon_{t-2}$ são não correlacionados entre si, então:

$$\gamma_0 = \text{Var}(\varepsilon_t) + \theta_1^2 \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2 \text{Var}(\varepsilon_{t-2}) = \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + \theta_2^2 \sigma^2.$$

$$\boxed{\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma^2.}$$

Passo 2 – calcular $\gamma_1 = \mathbb{E}[y_t y_{t-1}]$.

Expandimos o produto (mesma técnica do MA(1) nos slides):

$$y_t y_{t-1} = (\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}) (\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3}).$$

Tomando a esperança, sobrevivem apenas os produtos em que os *dois índices coincidem* (pois $\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \sigma^2 \mathbf{1}_{i=j}$). Identificamos os pares:

Produto	Índices	Contribuição
$\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}$	$t \neq t-1$	0
$\varepsilon_t \cdot \theta_1 \varepsilon_{t-2}$	$t \neq t-2$	0
$\varepsilon_t \cdot \theta_2 \varepsilon_{t-3}$	$t \neq t-3$	0
$\theta_1 \varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1}$	igual: $t-1 = t-1$	$\theta_1 \sigma^2$
$\theta_1 \varepsilon_{t-1} \cdot \theta_1 \varepsilon_{t-2}$	$t-1 \neq t-2$	0
$\theta_1 \varepsilon_{t-1} \cdot \theta_2 \varepsilon_{t-3}$	$t-1 \neq t-3$	0
$\theta_2 \varepsilon_{t-2} \cdot \varepsilon_{t-1}$	$t-2 \neq t-1$	0
$\theta_2 \varepsilon_{t-2} \cdot \theta_1 \varepsilon_{t-2}$	igual: $t-2 = t-2$	$\theta_1 \theta_2 \sigma^2$
$\theta_2 \varepsilon_{t-2} \cdot \theta_2 \varepsilon_{t-3}$	$t-2 \neq t-3$	0

$$\boxed{\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma^2.}$$

Passo 3 – calcular $\gamma_2 = \mathbb{E}[y_t y_{t-2}]$.

O mesmo processo, mas agora $y_{t-2} = \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-4}$. O único par de índices coincidentes é $\theta_2 \varepsilon_{t-2}$ (de y_t) com ε_{t-2} (de y_{t-2}):

$$\boxed{\gamma_2 = \theta_2 \sigma^2.}$$

Passo 4 – mostrar $\gamma_k = 0$ para $k \geq 3$.

y_t usa os ruídos com índices $\{t, t-1, t-2\}$. y_{t-k} usa os ruídos com índices $\{t-k, t-k-1, t-k-2\}$. Para $k \geq 3$, esses dois conjuntos são disjuntos (o menor índice de y_t é $t-2$, o maior de y_{t-k} é $t-k \leq t-3$), logo *todos* os produtos têm índices diferentes:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0 \text{ para todo par} \Rightarrow \gamma_k = 0 \text{ para } k \geq 3. \quad \checkmark$$

Valores numéricos para $\theta_1 = 0,7$, $\theta_2 = -0,4$:

$$\gamma_0 = (1 + 0,49 + 0,16)\sigma^2 = 1,65\sigma^2.$$

$$\gamma_1 = (0,7 + 0,7 \times (-0,4))\sigma^2 = (0,7 - 0,28)\sigma^2 = 0,42\sigma^2.$$

$$\gamma_2 = -0,4\sigma^2.$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{0,42}{1,65} \approx 0,255. \quad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-0,4}{1,65} \approx -0,242.$$

((d)) PACF do MA(2) – sistema de Yule-Walker.

Usamos os valores $\rho_1 \approx 0,255$, $\rho_2 \approx -0,242$, $\rho_k = 0$ para $k \geq 3$.

$k = 1$:

$$(1) (\phi_{11}) = (\rho_1) \implies \phi_{11} = 0,255.$$

$k = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0,255 \\ 0,255 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,255 \\ -0,242 \end{pmatrix}.$$

Da fórmula do item (b) (válida para qualquer processo):

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-0,242 - 0,255^2}{1 - 0,255^2} = \frac{-0,242 - 0,065}{1 - 0,065} = \frac{-0,307}{0,935} \approx -0,328.$$

(Para recuperar ϕ_{21} : da Linha 1, $\phi_{21} = \rho_1 - \rho_1\phi_{22} = 0,255(1 - (-0,328)) = 0,255 \times 1,328 \approx 0,339$.)

$k = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,255 \\ -0,242 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Linha 3: $\rho_2 \phi_{31} + \rho_1 \phi_{32} + \phi_{33} = 0$. Precisamos primeiro de ϕ_{31} e ϕ_{32} . Das Linhas 1 e 2 (sistema 2×2 com $\rho_3 = 0$ no RHS):

$$\phi_{31} + 0,255 \phi_{32} + (-0,242) \phi_{33} = 0,255,$$

$$0,255 \phi_{31} + \phi_{32} + 0,255 \phi_{33} = -0,242.$$

Usando os coeficientes já calculados em $k = 2$ como ponto de partida e resolvendo o sistema 3×3 , obtemos numericamente $\phi_{31} \approx 0,200$, $\phi_{32} \approx -0,395$, $\phi_{33} \approx 0,199$.

Observe o padrão: para o MA(2), $\phi_{33} \neq 0$ – a PACF *não* se anula no lag 3. Ela continuaria não-nula para $k = 4, 5, \dots$ (decaindo em módulo). Isso é a dualidade: MA(q) tem PACF infinita, enquanto AR(p) tem PACF que corta em p .

((e)) Tabela de resultados.

Lag k	AR(2) ($\phi_1=1,0, \phi_2=-0,5$)		MA(2) ($\theta_1=0,7, \theta_2=-0,4$)	
	ρ_k	ϕ_{kk}	ρ_k	ϕ_{kk}
1	0,667	0,667	0,255	0,255
2	0,167	-0,500	-0,242	-0,328
3	-0,167	0,000	0,000	0,199
4	-0,250	0,000	0,000	$\approx -0,11$

Padrão das colunas:

- **AR(2)** – ρ_k : decai oscilando (raízes complexas) segundo a recursão $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$.
- **AR(2)** – ϕ_{kk} : corta em zero após o lag 2 – o número de lags do AR.
- **MA(2)** – ρ_k : exatamente zero para $k \geq 3$ – o número de lags do MA.
- **MA(2)** – ϕ_{kk} : não se anula – decai (em módulo) mas permanece não-zero.

Gabarito Questão 2. (ACF e PACF – identificação gráfica)

((a)) **AR(1)** com $\phi \approx 0,75$.

ACF *decai geometricamente* (nunca corta abruptamente) e PACF *corta após o lag 1*. Essa é a assinatura característica de um AR(p) puro: a ACF declina à taxa ϕ^k enquanto a PACF é zero para $k \geq 2$, porque não há dependência direta além do lag 1 após controlar pelo intermediário.

((b)) **MA(2)** com $\theta_1 = 0,7, \theta_2 = -0,4$.

ACF *corta após o lag 2* (zerando exatamente a partir de $k = 3$) e PACF *decai oscilando* em magnitude. Isso reflete o teorema da dualidade: um MA(q) tem representação AR(∞), portanto sua PACF nunca corta. O sinal da oscilação da PACF (negativo no lag 2) é consistente com $\theta_2 < 0$.

((c)) **AR(2)** com $\phi_1 = 1,0, \phi_2 = -0,5$.

ACF *decai oscilando* (valores positivos nos lags ímpares, negativos nos pares) e PACF *corta após o lag 2*. O padrão oscilatório da ACF indica raízes complexas no polinômio característico do AR(2). A PACF corta exatamente no lag 2, confirmando que a ordem autorregressiva é $p = 2$.

((d)) **ARMA(1,1)** com $\phi = 0,7, \theta = 0,4$.

Ambas ACF e PACF *decaem* sem corte abrupto. A ACF decai geometricamente a partir do lag 1 (após o primeiro lag, o componente AR domina). A PACF exibe valores decrescentes em módulo com alternância de sinal. Essa dualidade – sem corte em nenhuma – é a assinatura do ARMA(p, q).

Tabela-resumo (memorize):

Processo	ACF	PACF
AR(p)	decai	corta no lag p
MA(q)	corta no lag q	decai
ARMA(p, q)	decai	decai
Ruído branco	≈ 0 em todos	≈ 0 em todos

Gabarito Questão 3. (Metodologia de Box-Jenkins)

((a)) **As 3 etapas.**

1. **Identificação.** Objetivo: determinar as ordens (p, d, q). Ferramentas: (i) inspeção do gráfico da série; (ii) teste ADF para determinar d ; (iii) análise da ACF e PACF da série diferenciada para sugerir p e q .

2. **Estimação.** Objetivo: estimar os parâmetros $(\hat{\mu}, \hat{\phi}_i, \hat{\theta}_j)$ dos modelos candidatos e escolher o melhor. Ferramentas: MQO (modelos puramente AR) ou máxima verossimilhança (modelos com MA); critérios de informação AIC e BIC.
3. **Diagnóstico.** Objetivo: verificar se os resíduos se comportam como ruído branco. Ferramentas: ACF dos resíduos (inspeção visual) e teste de Ljung-Box (formal). Se falhar, retorna à etapa 1.

((b)) Seleção de modelo.

O modelo com menor AIC é o ARIMA(2, 1, 1) com $AIC = -319,2$, mas tem 3 parâmetros. O segundo menor é ARIMA(1, 1, 1) com $AIC = -318,7$ e apenas 2 parâmetros. A diferença $\Delta AIC = 0,5$ é irrelevante para justificar um parâmetro extra.

Escolha: ARIMA(1, 1, 1) – menor AIC entre os de 2 parâmetros e diferença desprezível frente ao maior. Princípio da parcimônia: não complicar além do necessário.

((c)) AIC vs. BIC.

$$AIC: \log(SQR/T) + \frac{2(1+p)}{T}, \quad BIC: \log(SQR/T) + \frac{\log(T)(1+p)}{T}.$$

Para $T = 200$: penalidade do AIC por parâmetro extra = $2/200 = 0,010$; penalidade do BIC = $\log(200)/200 = 5,298/200 = 0,0265$. Como $\log(200) \approx 5,3 > 2$, o BIC penaliza mais fortemente e tende a selecionar modelos com **menos** parâmetros.

Gabarito Questão 4. (Diagnóstico – Ljung-Box)

((a)) Estatística $Q(5)$.

$$Q(k) = T(T+2) \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j}$$

Com $T = 120$ e $k = 5$:

$$\begin{aligned} Q(5) &= 120 \cdot 122 \left[\frac{(0,08)^2}{119} + \frac{(0,06)^2}{118} + \frac{(0,11)^2}{117} + \frac{(0,03)^2}{116} + \frac{(0,09)^2}{115} \right] \\ &= 14640 \left[\frac{0,0064}{119} + \frac{0,0036}{118} + \frac{0,0121}{117} + \frac{0,0009}{116} + \frac{0,0081}{115} \right] \\ &= 14640 [5,378 + 3,051 + 10,342 + 0,776 + 7,043] \times 10^{-5} \\ &= 14640 \times 2,659 \times 10^{-4} \approx 3,89. \end{aligned}$$

((b)) Decisão.

$$Q(5) \approx 3,89 < 11,07 = \chi_{0,95;5}^2.$$

Não rejeitamos H_0 . Os resíduos não apresentam evidência de autocorrelação a 5%. O modelo passa no diagnóstico – os resíduos são consistentes com ruído branco.

((c)) Se não passasse.

Voltaríamos à Etapa 1 (identificação): analisaríamos a ACF dos resíduos para identificar os lags significativos e tentaríamos um modelo de ordem superior (ex.: ARIMA(2, 1, 0) ou ARIMA(1, 1, 1)). O procedimento é iterativo até os resíduos passarem no diagnóstico.

Gabarito Questão 5. (Previsão com AR(1))

Modelo: $y_t = 3 + 0,7 y_{t-1} + u_t$; $y_T = 20$; $\bar{y} = 3/(1 - 0,7) = 10$.

((a)) Previsões recursivas.

$$\hat{y}_{T+1} = 3 + 0,7 \times 20 = 3 + 14 = 17,0.$$

$$\hat{y}_{T+2} = 3 + 0,7 \times 17,0 = 3 + 11,9 = 14,9.$$

$$\hat{y}_{T+3} = 3 + 0,7 \times 14,9 = 3 + 10,43 = 13,43.$$

((b)) $\bar{y} = 3/(1 - 0,7) = 10$. Cada período, a distância à média cai em 30%: $20 - 10 = 10$; $17 - 10 = 7$; $14,9 - 10 = 4,9$; $13,43 - 10 = 3,43$. Razão $\approx 0,70$ em cada passo – consistente com $\phi^h \rightarrow 0$.

((c)) **Fórmula geral.** Para $h = 1$: $\hat{y}_{T+1} = 3 + 0,7y_T$. Para $h = 2$: substituir $\hat{y}_{T+1}$:

$$\hat{y}_{T+2} = 3 + 0,7(3 + 0,7y_T) = 3(1 + 0,7) + 0,49y_T.$$

Por indução, $\hat{y}_{T+h} = 3(1 + 0,7 + \dots + 0,7^{h-1}) + 0,7^h y_T = \frac{3(1 - 0,7^h)}{1 - 0,7} + 0,7^h y_T$.

Para $h = 5$: $\hat{y}_{T+5} = 10(1 - 0,168) + 0,168 \times 20 = 8,32 + 3,36 = 11,68$. Para $h = 10$: $\hat{y}_{T+10} = 10(1 - 0,028) + 0,028 \times 20 = 9,72 + 0,56 = 10,28 \approx \bar{y}$.

((d)) **Variância do erro.**

$e_{T+h} = \sum_{j=0}^{h-1} 0,7^j u_{T+h-j}$. Como os u_t são não correlacionados:

$$\text{Var}(e_{T+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} 0,7^{2j} = \sigma^2 \frac{1 - 0,49^h}{1 - 0,49}.$$

$h = 1$: σ^2 . $h = 2$: $\sigma^2(1 + 0,49) = 1,49\sigma^2$. $h = 3$: $\sigma^2(1 + 0,49 + 0,240) = 1,730\sigma^2$. Quando $h \rightarrow \infty$: $\sigma^2/(1 - 0,49) = \sigma^2/0,51 = \text{Var}(y_t)$. Monotonicamente crescente. ✓

Gabarito Questão 6. (Previsão recursiva do ARMA(1,1))

Modelo: $y_t = \mu + \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$, $|\phi| < 1$.

((a)) **Regras de previsão.**

Para $h = 1$: $y_{T+1} = \mu + \phi y_T + u_{T+1} + \theta u_T$. Aplicando $\mathbb{E}[\cdot | \Omega_T]$: $\hat{y}_{T+1} = \mu + \phi y_T + 0 + \theta \hat{u}_T$.

✓

Para $h = 2$: $y_{T+2} = \mu + \phi y_{T+1} + u_{T+2} + \theta u_{T+1}$. Esperança condicional: $\hat{y}_{T+2} = \mu + \phi \hat{y}_{T+1} + 0 + \theta \cdot 0 = \mu + \phi \hat{y}_{T+1}$.

O componente MA desaparece a partir de $h = 2$ porque u_{T+1} é *futuro* – sua esperança condicional é zero, ao contrário de u_T que é *passado* e já foi estimado.

((b)) **Fórmulas explícitas.**

$\hat{y}_{T+2}$: substituir $\hat{y}_{T+1}$:

$$\hat{y}_{T+2} = \mu + \phi(\mu + \phi y_T + \theta \hat{u}_T) = \mu(1 + \phi) + \phi^2 y_T + \phi \theta \hat{u}_T.$$

$\hat{y}_{T+3}$: substituir $\hat{y}_{T+2}$:

$$\hat{y}_{T+3} = \mu + \phi \hat{y}_{T+2} = \mu + \phi[\mu(1 + \phi) + \phi^2 y_T + \phi \theta \hat{u}_T] = \mu(1 + \phi + \phi^2) + \phi^3 y_T + \phi^2 \theta \hat{u}_T.$$

((c)) **Fórmula geral.**

Hipótese de indução: $\hat{y}_{T+h-1} = \frac{\mu(1 - \phi^{h-1})}{1 - \phi} + \phi^{h-1} y_T + \phi^{h-2} \theta \hat{u}_T$.

Passo da indução ($h \geq 2$):

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+h} &= \mu + \phi \hat{y}_{T+h-1} \\ &= \mu + \phi \left[\frac{\mu(1 - \phi^{h-1})}{1 - \phi} + \phi^{h-1} y_T + \phi^{h-2} \theta \hat{u}_T \right] \\ &= \mu \left[1 + \frac{\phi(1 - \phi^{h-1})}{1 - \phi} \right] + \phi^h y_T + \phi^{h-1} \theta \hat{u}_T \\ &= \mu \cdot \frac{(1 - \phi) + \phi(1 - \phi^{h-1})}{1 - \phi} + \phi^h y_T + \phi^{h-1} \theta \hat{u}_T \\ &= \frac{\mu(1 - \phi^h)}{1 - \phi} + \phi^h y_T + \phi^{h-1} \theta \hat{u}_T. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Para $h = 1$: $\mu(1 - \phi)/(1 - \phi) + \phi y_T + \phi^0 \theta \hat{u}_T = \mu + \phi y_T + \theta \hat{u}_T \checkmark$.

((d)) **Convergência.**

Quando $h \rightarrow \infty$ (e $|\phi| < 1$): $\phi^h \rightarrow 0$ e $\phi^{h-1} \rightarrow 0$.

$$\hat{y}_{T+h} \rightarrow \frac{\mu}{1 - \phi} = \bar{y}.$$

Idêntico ao AR(1) puro. O componente MA influencia a velocidade com que a previsão se afasta de y_T (especialmente no passo $h = 1$), mas o limite é o mesmo.

Gabarito Questão 7. (Erro de previsão do ARMA(1,1))

((a)) e_{T+1} .

$$e_{T+1} = y_{T+1} - \hat{y}_{T+1} = (\mu + \phi y_T + u_{T+1} + \theta u_T) - (\mu + \phi y_T + \theta \hat{u}_T) = u_{T+1} + \theta(u_T - \hat{u}_T).$$

Assumindo que os resíduos estimados convergem para os verdadeiros ($\hat{u}_T \approx u_T$):

$$\boxed{e_{T+1} = u_{T+1}.$$

((b)) e_{T+2} .

$$y_{T+2} = \mu + \phi y_{T+1} + u_{T+2} + \theta u_{T+1}. \quad \hat{y}_{T+2} = \mu + \phi \hat{y}_{T+1}.$$

$$\begin{aligned} e_{T+2} &= \phi(y_{T+1} - \hat{y}_{T+1}) + u_{T+2} + \theta u_{T+1} \\ &= \phi e_{T+1} + u_{T+2} + \theta u_{T+1} \\ &= \phi u_{T+1} + u_{T+2} + \theta u_{T+1} \\ &= \boxed{(\phi + \theta) u_{T+1} + u_{T+2}.} \end{aligned}$$

((c)) e_{T+3} .

$$\begin{aligned} e_{T+3} &= \phi e_{T+2} + u_{T+3} + \theta u_{T+2} = \phi[(\phi + \theta)u_{T+1} + u_{T+2}] + u_{T+3} + \theta u_{T+2} \\ &= \boxed{\phi(\phi + \theta) u_{T+1} + (\phi + \theta) u_{T+2} + u_{T+3}.} \end{aligned}$$

((d)) **Padrão geral.**

Vemos que para $h \geq 2$:

$$e_{T+h} = u_{T+h} + (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{h-1} \phi^{j-1} u_{T+h-j}.$$

Verificação para $h = 2$: $u_{T+2} + (\phi + \theta)\phi^0 u_{T+1} = u_{T+2} + (\phi + \theta)u_{T+1} \checkmark$. Para $h = 3$: $u_{T+3} + (\phi + \theta)[u_{T+2} + \phi u_{T+1}] \checkmark$.

((e)) **Esperança e variância.**

$\mathbb{E}[e_{T+h}] = 0$ (todos os u têm média zero) $\Rightarrow$ **previsão não viesada.**

Para $h \geq 2$, como os u_t são não correlacionados:

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_{T+h}) &= \sigma^2 + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=1}^{h-1} \phi^{2(j-1)} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \left[1 + (\phi + \theta)^2 \frac{1 - \phi^{2(h-1)}}{1 - \phi^2} \right]. \end{aligned}$$

É crescente em h pois cada nova parcela da soma é não-negativa.

Para $h = 1$: $\text{Var}(e_{T+1}) = \sigma^2$. Para $h = 2$: $\sigma^2[1 + (\phi + \theta)^2]$. À medida que $h \rightarrow \infty$: $\text{Var}(e_{T+h}) \rightarrow \sigma^2 \left[1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2}\right] < \infty$.

((f)) **Comparação com AR(1).**

Para AR(1) ($\theta = 0$), da Q4(d): $\text{Var}^{AR}(e_{T+h}) = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2}$.

Para ARMA(1,1) com $h \geq 2$: $\text{Var}^{ARMA}(e_{T+h}) = \sigma^2 \left[1 + (\phi + \theta)^2 \frac{1 - \phi^{2(h-1)}}{1 - \phi^2}\right]$.

Compare: $\text{Var}^{ARMA} - \text{Var}^{AR} = \sigma^2 [1 + (\phi + \theta)^2/(1 - \phi^2)] - \sigma^2/(1 - \phi^2) = \sigma^2 [1 - 1/(1 - \phi^2) + (\phi + \theta)^2/(1 - \phi^2)] = \sigma^2 \frac{(\phi + \theta)^2 - \phi^2}{1 - \phi^2} = \sigma^2 \frac{\theta(\theta + 2\phi)}{1 - \phi^2}$.

Para $\phi > 0$ e $\theta > 0$: $\theta(\theta + 2\phi) > 0$, portanto $\text{Var}^{ARMA} > \text{Var}^{AR}$.

Interpretação: no ARMA(1,1), o componente MA agrega incerteza adicional (o primeiro passo já acumula $(\phi + \theta)^2$ sobre o resíduo u_{T+1}). O AR puro dissipa a informação mais lentamente mas parte de uma variância menor.

Gabarito Questão 8. (Medidas de desempenho)

((a)) **Erros, MAE, RMSE e MAPE.**

h	e_h^A	$ e_h^A $	$(e_h^A)^2$	$ e_h^A/y_h \%$	e_h^B	$ e_h^B $	$(e_h^B)^2$	$ e_h^B/y_h \%$
1	+0,12	0,12	0,0144	19,4	+0,04	0,04	0,0016	6,5
2	-0,06	0,06	0,0036	13,6	-0,03	0,03	0,0009	6,8
3	+0,21	0,21	0,0441	29,6	+0,06	0,06	0,0036	8,5
4	-0,12	0,12	0,0144	31,6	-0,03	0,03	0,0009	7,9
5	+0,05	0,05	0,0025	9,1	+0,03	0,03	0,0009	5,5
		0,56	0,0790	103,3		0,19	0,0079	35,2

$\text{MAE}^A = 0,56/5 = 0,112$; $\text{RMSE}^A = \sqrt{0,0790/5} = \sqrt{0,0158} \approx 0,126$; $\text{MAPE}^A = 103,3/5 = 20,7\%$.

$\text{MAE}^B = 0,19/5 = 0,038$; $\text{RMSE}^B = \sqrt{0,0079/5} = \sqrt{0,00158} \approx 0,040$; $\text{MAPE}^B = 35,2/5 = 7,0\%$.

((b)) Modelo B é claramente superior em todas as medidas (MAE, RMSE e MAPE são de 3 a 6 vezes menores). O SARIMA captura a sazonalidade mensal do IPCA que o ARIMA(1, 1, 0) ignora.

((c)) O MAPE divide cada erro por $|y_{T+h}|$. Se o IPCA ficar próximo de zero (desinflação), o denominador explode o MAPE para $+\infty$. Alternativa: MAE (em pontos percentuais) ou RMSE.

Gabarito Questão 9. (ARDL: curto e longo prazo)

((a)) ARDL($p = 1, m = 1$): um lag de C e até um lag de Y .

((b)) $\text{ECP} = \partial \hat{C}_t / \partial Y_t = 0,30$. Interpretação: um real a mais na renda disponível eleva o consumo em 30 centavos no mesmo trimestre.

((c))

$$\text{ELP} = \frac{\hat{\eta}_0 + \hat{\eta}_1}{1 - \hat{\phi}_1} = \frac{0,30 + 0,20}{1 - 0,40} = \frac{0,50}{0,60} = \boxed{0,833 \dots} \approx 0,83.$$

((d)) O ECP é 0,30 (efeito imediato de 1 real), mas o ELP é $\approx 0,83$ – a inércia do consumo ($\hat{\phi}_1 = 0,40$) amplifica gradualmente o choque. O multiplicador de longo prazo é $1/(1 - 0,40) = 1,67$: cada real de renda de curto prazo “vale” 1,67 reais de efeito total no longo prazo.

Gabarito Questão 10. (Cointegração e Engle-Granger)

((a)) Conceito.

Duas séries $I(1)$ são **cointegradas** se existe um vetor (β_1, β_2) tal que $\beta_1 y_t + \beta_2 x_t \sim I(0)$ – a combinação linear é estacionária. Isso significa que as duas séries compartilham uma tendência estocástica comum e não se afastam indefinidamente.

Cointegradas: consumo e renda – ambas crescentes no longo prazo com relação proporcional estável. **Não cointegradas:** PIB do Brasil e do Japão – ambas $I(1)$ mas sem relação estrutural que as mantenha próximas.

((b)) Engle-Granger em 3 passos.

1. Testar raiz unitária em y_t e x_t pelo ADF. Ambas devem ser $I(1)$.
2. Estimar $y_t = \hat{\mu} + \hat{\eta}x_t + \hat{u}_t$ por MQO e guardar resíduos $\hat{u}_t$.
3. Aplicar ADF a $\hat{u}_t$. H_0 : raiz unitária (sem cointegração). Se $\tau < \tau_c$ (EG), há cointegração.

Os valores críticos do EG são **mais negativos** porque os resíduos $\hat{u}_t$ foram gerados pela MQO, que os torna artificialmente próximos de zero (minimização de $\sum \hat{u}_t^2$). Isso faz com que o ADF nos resíduos rejeite H_0 com mais frequência do que deveria – é necessário um valor crítico mais negativo para compensar esse viés.

((c)) V/F.

- (i) **V**. Definição de cointegração.
- (ii) **F**. Se cointegradas, a regressão é válida (não espúria).
- (iii) **F**. Para cointegração, as séries precisam ter a **mesma** ordem de integração. Um $I(1)$ e um $I(2)$ não podem cointegrar (a combinação seria $I(1)$ ou $I(2)$, não $I(0)$).
- (iv) **V**. A regressão em diferenças é válida pois regride $I(0)$ em $I(0)$, mas descarta a dinâmica de longo prazo capturada pelo VECM.
- (v) **F**. Para 3 ou mais variáveis, o número de possíveis vetores de cointegração é > 1 e deve-se usar o teste de **Johansen**, com valores críticos próprios.

((d)) Numérico.

(i) $\tau(p_t) = -1,42 > -2,87$ e $\tau(m_t) = -1,81 > -2,87$: não rejeitam H_0 de raiz unitária. $\tau(\Delta p_t) = -8,34 < -2,87$ e $\tau(\Delta m_t) = -7,11 < -2,87$: rejeita em diferenças. **Ambas são $I(1)$.**

(ii) $\tau(\hat{u}_t) = -3,51 < -3,34$ (VC de Engle-Granger): rejeita H_0 de raiz unitária nos resíduos. **Há cointegração.**

Gabarito Questão 11. (VECM)

((a)) $\hat{\eta} = 0,82$: no **equilíbrio de longo prazo**, cada real a mais na renda está associado a 82 centavos a mais no consumo. A propensão marginal a consumir de longo prazo é 0,82.

((b))

$\hat{\eta}_0 = 0,55$: no curto prazo (mesmo período), um aumento de 1 real na renda eleva o crescimento do consumo em 0,55 reais.

$\hat{\lambda} = -0,30 < 0$ (correto): se y está acima do equilíbrio ($\hat{u}_{t-1} > 0$), o mecanismo de correção reduz ΔC_t (corrige para baixo). Se $\lambda > 0$, o desvio se ampliaria – instabilidade. Se $\lambda < -1$, haveria superajuste oscilatório.

((c)) Contribuição do termo ECM:

$$\hat{\lambda} \cdot \hat{u}_{t-1} = (-0,30) \times 2 = -0,60 \text{ bilhões de reais.}$$

O consumo cresce 0,60 bilhões a menos do que cresceria em equilíbrio – correção parcial (30%) do desvio em cada período.

((d)) Derivação algébrica.

Partindo de ARDL(1, 1): $C_t = \mu + \phi_1 C_{t-1} + \eta_0 Y_t + \eta_1 Y_{t-1} + u_t$.

Subtraindo C_{t-1} de ambos os lados:

$$\Delta C_t = \mu + (\phi_1 - 1)C_{t-1} + \eta_0 Y_t + \eta_1 Y_{t-1} + u_t.$$

Somando e subtraindo $\eta_0 Y_{t-1}$:

$$\Delta C_t = \mu + \eta_0 \Delta Y_t + (\phi_1 - 1)C_{t-1} + (\eta_0 + \eta_1)Y_{t-1} + u_t.$$

Fatorando $(\phi_1 - 1)$ no segundo e terceiro termos de y :

$$\Delta C_t = \mu^* + \eta_0 \Delta Y_t + (\phi_1 - 1) \underbrace{\left[C_{t-1} - \frac{\eta_0 + \eta_1}{1 - \phi_1} Y_{t-1} \right]}_{\hat{u}_{t-1}} + u_t,$$

com $\lambda = \phi_1 - 1 < 0$ (pois $\phi_1 < 1$) e $ELP = (\eta_0 + \eta_1)/(1 - \phi_1)$.