

Gabarito – Lista 1

Econometria II – UFBA | Prof. Pablo Castro

Este gabarito é uma ferramenta de estudo: as derivações estão escritas passo a passo. Acompanhe cada passo refazendo no papel, e leia os comentários (o porquê de cada coisa).

Gabarito Questão 1. (V/F)

- (a) **F**. Para ruído branco em sentido fraco, $\rho(k) = 0$ para $k \neq 0$ **por definição**, qualquer que seja a distribuição marginal. Não-correlação \neq independência: pode haver dependência não-linear.
- (b) **F**. Estacionariedade exige que as raízes do polinômio característico $\phi(z) = 0$ estejam **fora** do círculo unitário (módulo > 1), **não** dentro.
- (c) **V**. Qualquer MA(q) com coeficientes finitos tem \mathbb{E} , Var e $\gamma(k)$ finitos e constantes em t – estacionariedade fraca é automática. A *invertibilidade* (raízes da parte MA fora do círculo) é uma propriedade separada.
- (d) **V**. Se $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, então $\Delta y_t = \varepsilon_t$ é ruído branco \Rightarrow estacionário. Por isso $y_t \sim I(1)$.
- (e) **F**. A estacionariedade de um ARMA(p, q) depende **apenas** dos coeficientes da parte AR (raízes de $\phi(z) = 0$ fora do círculo). A parte MA é **sempre** fracamente estacionária com coeficientes finitos – portanto não influencia. Os θ 's importam para a *invertibilidade*, propriedade separada.

Gabarito Questão 2. (Polinômio característico)

Regra: $\phi(L)y_t = \varepsilon_t$ é estacionário sse todas as raízes de $\phi(z) = 0$ têm módulo > 1 .

- (a) $y_t = 0,7y_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow (1 - 0,7L)y_t = \varepsilon_t$. Polinômio: $\phi(z) = 1 - 0,7z$. Raiz: $1 - 0,7z = 0 \Rightarrow z = 1/0,7 \approx 1,43$. $|z| > 1 \Rightarrow$ **estacionário**.
- (b) $0,35z^2 - 1,2z + 1 = 0$.

$$z = \frac{1,2 \pm \sqrt{1,44 - 1,4}}{0,7} = \frac{1,2 \pm 0,2}{0,7}.$$

Raízes: $z_1 = 2$ e $z_2 \approx 1,43$. Ambas $|z| > 1 \Rightarrow$ **estacionário**.

- (c) $0,6z^2 + 0,5z - 1 = 0$.

$$z = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,25 + 2,4}}{1,2} = \frac{-0,5 \pm 1,628}{1,2}.$$

Raízes: $z_1 \approx 0,94$ e $z_2 \approx -1,77$. $|z_1| < 1$ viola \Rightarrow **não estacionário**.

- (d) $0,25z^2 - z + 1 = 0$. Discriminante = $1 - 1 = 0$. Raiz dupla $z = 2$. $|z| = 2 > 1 \Rightarrow$ **estacionário**.

Atalho AR(2): estacionário sse $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$, $|\phi_2| < 1$. Em (c): $0,5 + 0,6 = 1,1 > 1$, viola. ✓

Gabarito Questão 3. (MA(2) – passo a passo)

Temos $y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$ com $\theta_1 = 0,8$, $\theta_2 = -0,3$, e $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$.

- (a) **Esperança** $\mathbb{E}[y_t]$.

A esperança é linear, então passa por somas e constantes:

$$\mathbb{E}[y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] + \theta_2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}].$$

Como $\{\varepsilon_t\}$ é ruído branco, $\mathbb{E}[\varepsilon_s] = 0$ para todo s . Logo $\mathbb{E}[y_t] = 0$.

Variância $\gamma(0) = \text{Var}(y_t)$.

Por definição, $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$. Como acabamos de mostrar que $\mathbb{E}[y_t] = 0$, isso simplifica para

$$\text{Var}(y_t) = \mathbb{E}[y_t^2].$$

(É por isso que vamos elevar y_t ao quadrado: porque $\text{Var}(y_t) = \mathbb{E}[y_t^2]$ quando a média é zero.)

Elevando y_t ao quadrado e expandindo (usando $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$):

$$\begin{aligned} y_t^2 &= (\varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1} - 0,3\varepsilon_{t-2})^2 \\ &= \varepsilon_t^2 + 0,64\varepsilon_{t-1}^2 + 0,09\varepsilon_{t-2}^2 \\ &\quad + 1,6\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - 0,6\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} - 0,48\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}. \end{aligned}$$

Tomando esperança termo a termo e usando $\mathbb{E}[\varepsilon_s\varepsilon_r] = 0$ para $s \neq r$ e $\mathbb{E}[\varepsilon_s^2] = \sigma^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y_t^2] &= \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]}_{=\sigma^2} + 0,64 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]}_{=\sigma^2} + 0,09 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}^2]}_{=\sigma^2} \\ &\quad + 1,6 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}]}_{=0} - 0,6 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}]}_{=0} - 0,48 \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}]}_{=0} \\ &= \sigma^2(1 + 0,64 + 0,09) = 1,73\sigma^2. \end{aligned}$$

Portanto $\gamma(0) = 1,73\sigma^2$.

(b) $\gamma(1)$, $\gamma(2)$, $\gamma(3)$ e $\gamma(k)$ para $k \geq 3$.

Por definição, $\gamma(k) = \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \mathbb{E}[y_t y_{t-k}] - \mathbb{E}[y_t] \mathbb{E}[y_{t-k}]$. Como as médias são zero, $\gamma(k) = \mathbb{E}[y_t y_{t-k}]$.

$\gamma(1)$: Note que $y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + 0,8\varepsilon_{t-2} - 0,3\varepsilon_{t-3}$.

Ao expandir $y_t \cdot y_{t-1}$, apenas **produtos com o mesmo índice de ε sobrevivem na esperança** (os outros vão a zero). Vamos enumerar os pares com mesmo índice:

- Coeficiente de ε_{t-1}^2 : do termo $0,8\varepsilon_{t-1}$ em y_t vezes ε_{t-1} em $y_{t-1} \Rightarrow 0,8 \cdot 1 = 0,8$.
- Coeficiente de ε_{t-2}^2 : do termo $-0,3\varepsilon_{t-2}$ em y_t vezes $0,8\varepsilon_{t-2}$ em $y_{t-1} \Rightarrow (-0,3) \cdot 0,8 = -0,24$.

Esperança:

$$\gamma(1) = 0,8 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] - 0,24 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}^2] = (0,8 - 0,24)\sigma^2 = 0,56\sigma^2.$$

$\gamma(2)$: $y_{t-2} = \varepsilon_{t-2} + 0,8\varepsilon_{t-3} - 0,3\varepsilon_{t-4}$.

Índices em y_t : $\{t, t-1, t-2\}$. Em y_{t-2} : $\{t-2, t-3, t-4\}$. Interseção: $\{t-2\}$.

Único termo sobrevivente: coeficiente $-0,3 \cdot 1 = -0,3$ vezes $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}^2] = \sigma^2$.

$$\gamma(2) = -0,3\sigma^2.$$

$\gamma(3)$: $y_{t-3} = \varepsilon_{t-3} + 0,8\varepsilon_{t-4} - 0,3\varepsilon_{t-5}$. Índices: $\{t-3, t-4, t-5\}$. Interseção com $\{t, t-1, t-2\}$ é vazia. Todos os produtos cruzados zeram. $\gamma(3) = 0$, e pelo mesmo argumento $\gamma(k) = 0$ para todo $k \geq 3$.

(c) $\rho(1) = \gamma(1)/\gamma(0) = 0,56/1,73 \approx 0,324$ e $\rho(2) = -0,30/1,73 \approx -0,173$.

(d) Em um MA(q), y_t envolve no máximo $q + 1$ inovações: $\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q}$. Para $k > q$, y_{t-k} envolve $\varepsilon_{t-k}, \dots, \varepsilon_{t-k-q}$, todas com índice menor. Não há ε em comum \Rightarrow todos os produtos cruzados têm esperança zero $\Rightarrow \gamma(k) = 0$.

Gabarito Questão 4. (MA com memória curta – passo a passo)

$x_t = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-2}$, $\sigma^2 = 1$. Use $\theta_0 = 1, \theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1/4$.

Esperança. Linearidade + ruído branco: $\mathbb{E}[x_t] = 0$.

$\gamma(0) = \text{Var}(x_t)$. Como $\mathbb{E}[x_t] = 0$, $\text{Var}(x_t) = \mathbb{E}[x_t^2]$. Expandindo $(\varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-2})^2$:

$$x_t^2 = \varepsilon_t^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1}^2 + \frac{1}{16}\varepsilon_{t-2}^2 + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}}_{\mathbb{E} \rightarrow 0} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{4}\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}}_{\mathbb{E} \rightarrow 0} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}}_{\mathbb{E} \rightarrow 0}.$$

Esperança:

$$\gamma(0) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{16+4+1}{16} = \frac{21}{16} \approx 1,3125.$$

$\gamma(1)$. $x_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2} + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-3}$.

Pares de mesmo índice em $x_t x_{t-1}$:

- ε_{t-1}^2 : coef. $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.
- ε_{t-2}^2 : coef. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$$\gamma(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

$\gamma(2)$. $x_{t-2} = \varepsilon_{t-2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-3} + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-4}$. Único ε comum: ε_{t-2} , com coeficiente $\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

$$\gamma(2) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$\gamma(k)$ para $k \geq 3$. Sem sobreposição de índices $\Rightarrow \gamma(k) = 0$.

Gabarito Questão 5. (AR(1) genérico – passo a passo)

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, |\phi| < 1, \varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2).$$

(a) **Esperança.** Por estacionariedade, $\mathbb{E}[y_t] = \mathbb{E}[y_{t-1}] =: m$ (constante). Tomando esperança da equação:

$$m = \mu + \phi m + 0 \Rightarrow m - \phi m = \mu \Rightarrow m(1 - \phi) = \mu \Rightarrow m = \frac{\mu}{1 - \phi}.$$

Variância. Para calcular $\text{Var}(y_t)$ via $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$, é cômodo **centralizar** y_t (caso contrário a expansão fica cheia de termos μ). Defina $\tilde{y}_t = y_t - m$. Subtraindo m da equação:

$$\tilde{y}_t = (\mu + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t) - m \stackrel{(*)}{=} \phi(y_{t-1} - m) + \varepsilon_t = \phi \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t,$$

onde em (*) usei $\mu = m(1 - \phi) = m - \phi m$. Note que centralizar não altera variância: $\text{Var}(y_t) = \text{Var}(\tilde{y}_t)$.

Como $\mathbb{E}[\tilde{y}_t] = 0$, $\text{Var}(\tilde{y}_t) = \mathbb{E}[\tilde{y}_t^2]$. Elevando ao quadrado:

$$\tilde{y}_t^2 = \phi^2 \tilde{y}_{t-1}^2 + 2\phi \tilde{y}_{t-1} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2.$$

Esperança:

$$\mathbb{E}[\tilde{y}_t^2] = \phi^2 \mathbb{E}[\tilde{y}_{t-1}^2] + 2\phi \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{y}_{t-1} \varepsilon_t]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]}_{=\sigma^2}.$$

Por que $\mathbb{E}[\tilde{y}_{t-1} \varepsilon_t] = 0$? Porque \tilde{y}_{t-1} é função apenas de $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ (inovações passadas), e ε_t é independente de cada uma delas $\Rightarrow \tilde{y}_{t-1}$ é independente de ε_t , e a covariância é zero.

Por estacionariedade $\mathbb{E}[\tilde{y}_t^2] = \mathbb{E}[\tilde{y}_{t-1}^2] = \gamma(0)$:

$$\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2 \Rightarrow \gamma(0)(1 - \phi^2) = \sigma^2 \Rightarrow \text{Var}(y_t) = \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

(b) $\gamma(k)$ para $k \geq 1$.

Multiplique $\tilde{y}_t = \phi \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t$ por \tilde{y}_{t-k} e tome esperança:

$$\mathbb{E}[\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-k}] = \phi \mathbb{E}[\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-k}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{y}_{t-k}].$$

Identificando $\gamma(k) = \mathbb{E}[\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-k}]$, $\gamma(k-1) = \mathbb{E}[\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-k}]$ (estacionariedade), e usando $\mathbb{E}[\varepsilon_t \tilde{y}_{t-k}] = 0$ para $k \geq 1$ (mesmo argumento de antes):

$$\gamma(k) = \phi \gamma(k-1).$$

Iterando: $\gamma(k) = \phi \gamma(k-1) = \phi^2 \gamma(k-2) = \dots = \phi^k \gamma(0)$. Portanto:

$$\gamma(k) = \phi^k \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}, \quad k \geq 0.$$

Em particular $\gamma(1) = \phi \sigma^2 / (1 - \phi^2)$ e $\gamma(2) = \phi^2 \sigma^2 / (1 - \phi^2)$. A ACF é $\rho(k) = \gamma(k) / \gamma(0) = \phi^k$ - decaimento geométrico.

Gabarito Questão 6. (Classificação)

- (a) **AR(1)** com $\phi = 0,6$.
- (b) **MA(3)** (com $\theta_2 = 0$; a ordem é o maior *lag* presente).
- (c) **ARMA(1,1)**.
- (d) $\Delta y_t = 0,3 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow$ a primeira diferença segue AR(1), então $y_t \sim \mathbf{ARIMA(1,1,0)}$.
- (e) Diferença regular $(1-L)$ + sazonal $(1-L^{12})$; MA regular e sazonal. **SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₁₂**.
- (f) Passeio aleatório = **ARIMA(0,1,0)**.

Gabarito Questão 7. (Passeio aleatório - passo a passo)

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad y_0 = 0, \quad \varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2).$$

(a) Iterando a recursão:

$$y_1 = \varepsilon_1, \quad y_2 = y_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad y_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \dots, \quad y_t = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j.$$

(b) **Esperança.** Linearidade: $\mathbb{E}[y_t] = \sum_{j=1}^t \mathbb{E}[\varepsilon_j] = 0$. Constante.

Variância. Como $\mathbb{E}[y_t] = 0$, $\text{Var}(y_t) = \mathbb{E}[y_t^2]$. Elevando ao quadrado:

$$y_t^2 = \left(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j \right)^2 = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j^2 + \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^t \varepsilon_j \varepsilon_i.$$

Esperança (cruzados $\rightarrow 0$, quadrados $\rightarrow \sigma^2$):

$$\mathbb{E}[y_t^2] = \sum_{j=1}^t \mathbb{E}[\varepsilon_j^2] + 0 = t \sigma^2.$$

$\text{Var}(y_t) = t \sigma^2$. Quando $t \rightarrow \infty$, $\text{Var}(y_t) \rightarrow \infty$.

(c) **Covariância.** Para $k \geq 0$:

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \mathbb{E}[y_t y_{t-k}] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j \right) \left(\sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i \right) \right] = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{t-k} \mathbb{E}[\varepsilon_j \varepsilon_i].$$

Sobrevivem apenas pares $j = i$, com $i \in \{1, \dots, t-k\}$ (limitado pelo lado direito):

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \sum_{i=1}^{t-k} \sigma^2 = (t-k) \sigma^2.$$

Esse valor depende de t .

(d) A definição de estacionariedade fraca exige:

- (i) $\mathbb{E}[y_t]$ constante \Rightarrow *satisfeito* ($= 0$).
- (ii) $\text{Var}(y_t)$ constante \Rightarrow *violado* ($= t\sigma^2$, cresce com t).
- (iii) $\text{Cov}(y_t, y_{t-k})$ depende só de $k \Rightarrow$ *violado* ($(t-k)\sigma^2$, depende de t).

Conclusão: o passeio aleatório viola as condições (ii) e (iii). Por isso é $I(1)$ – precisa de uma diferença para virar estacionário.

Gabarito Questão 8. (Tendência det. vs estocástica)

(A) $y_t = a + bt + u_t$, $u_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$. (B) $y_t = b + y_{t-1} + \varepsilon_t$.

- (a) (A) tendência **determinística** (a linha $a + bt$ é fixa). (B) tendência **estocástica** (random walk with drift – cada ε se acumula permanentemente).
- (b) Em (A), choque u_t afeta só o período t – **temporário**. Em (B), iterando $y_t = bt + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$; cada ε_j entra na soma e nunca sai – **permanente**.
- (c) (A) é *trend-stationary*: remover $a + bt$ por regressão deixa u_t estacionário. (B) é *difference-stationary*: $\Delta y_t = b + \varepsilon_t$ é estacionário. *Detrending* em (B) gera regressão espúria; *differencing* em (A) “superdiferencia” (cria MA(1) com raiz unitária).
- (d) DF: H_0 : raiz unitária ($y_t \sim I(1)$, modelo B). H_1 : estacionário (A). Em (A) rejeita-se H_0 ; em (B) não.

Gabarito Questão 9. (Filtro HP – passo a passo)

- (a) $\lambda = 0$: o termo de suavidade some. O ótimo é $\gamma_t = y_t$ (tendência colada – filtro não filtra). $\lambda \rightarrow \infty$: força segunda diferença a zero \Rightarrow inclinação constante \Rightarrow tendência é uma **reta** (regressão linear em t).
- (b) A penalização $\lambda \sum (\Delta^2 \gamma_t)^2$ opera *por período*. Mais frequência \Rightarrow mais oportunidades de mudança \Rightarrow precisa λ maior para a mesma suavização. **Ravn-Uhlig (2002)**: $\lambda_{\text{anual}} = \lambda_{\text{trim}}/4^4 = 1600/256 \approx 6,25$.
- (c) **Conta para $T = 3$, $y = (2, 5, 4)$, $\lambda = 1$.**
 Defina $D := (\gamma_3 - \gamma_2) - (\gamma_2 - \gamma_1) = \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3$ (segunda diferença).
 Reescrevendo a função objetivo: $F = (2 - \gamma_1)^2 + (5 - \gamma_2)^2 + (4 - \gamma_3)^2 + D^2$.
CPOs. Lembrando $\partial D/\partial \gamma_1 = 1$, $\partial D/\partial \gamma_2 = -2$, $\partial D/\partial \gamma_3 = 1$, e aplicando a regra da cadeia em D^2 :

$$\partial F/\partial \gamma_1 = -2(2 - \gamma_1) + 2D \cdot 1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 + D = 2 \quad (\text{Eq 1})$$

$$\partial F/\partial \gamma_2 = -2(5 - \gamma_2) + 2D \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \gamma_2 - 2D = 5 \quad (\text{Eq 2})$$

$$\partial F/\partial \gamma_3 = -2(4 - \gamma_3) + 2D \cdot 1 = 0 \Rightarrow \gamma_3 + D = 4 \quad (\text{Eq 3})$$

Resolvendo. Das três equações:

$$\gamma_1 = 2 - D, \quad \gamma_2 = 5 + 2D, \quad \gamma_3 = 4 - D.$$

Substituindo na definição $D = \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3$:

$$\begin{aligned} D &= (2 - D) - 2(5 + 2D) + (4 - D) \\ &= 2 - D - 10 - 4D + 4 - D \\ &= -4 - 6D \\ &\Rightarrow 7D = -4 \Rightarrow D = -\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Voltando:

$$\gamma_1 = 2 + \frac{4}{7} = \frac{18}{7} \approx 2,571, \quad \gamma_2 = 5 - \frac{8}{7} = \frac{27}{7} \approx 3,857, \quad \gamma_3 = 4 + \frac{4}{7} = \frac{32}{7} \approx 4,571.$$

Verificação. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = (18 + 27 + 32)/7 = 77/7 = 11 = y_1 + y_2 + y_3$. O filtro HP preserva a soma. ✓

Interpretação. Como $\lambda = 1$ é pequeno, a tendência fica próxima da série, mas suaviza o pico em $y_2 = 5$ – a tendência ali é $27/7 \approx 3,86$, menor que 5.

Gabarito Questão 10. (Pesos determinísticos vs aleatórios – passo a passo)

$A_t = \varepsilon_t$; $B_t = c_t \varepsilon_t$ (c_t determinístico); $C_t = D_t \varepsilon_t$ (D_t aleatório). $\varepsilon_t \sim$ i.i.d. $N(0, 1)$, portanto $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = 1$.

(a) $\{A_t\}$ é estacionário.

- $\mathbb{E}[A_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$.
- $\text{Var}(A_t) = \mathbb{E}[A_t^2] - 0 = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = 1$. Constante.
- $\text{Cov}(A_t, A_{t-k}) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = 0$ se $k \neq 0$, $= 1$ se $k = 0$. Depende só de k .

$\{A_t\}$ é ruído branco \Rightarrow fracamente estacionário.

(b) $\{B_t\}$ NÃO é estacionário.

Esperança. Como c_t é *determinístico* (constante em relação à esperança):

$$\mathbb{E}[B_t] = c_t \mathbb{E}[\varepsilon_t] = c_t \cdot 0 = 0 \quad \forall t.$$

Variância. Como $\mathbb{E}[B_t] = 0$, $\text{Var}(B_t) = \mathbb{E}[B_t^2] = \mathbb{E}[c_t^2 \varepsilon_t^2] = c_t^2 \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = c_t^2$. Logo:

$$\text{Var}(B_t) = \begin{cases} 1, & t \text{ par,} \\ 9, & t \text{ ímpar.} \end{cases}$$

A variância alterna entre 1 e 9 – depende de t . Como uma das condições de estacionariedade falha (variância não constante), $\{B_t\}$ NÃO é fracamente estacionário.

(c) $\{C_t\}$ É estacionário.

Primeiro, momentos de D_t (uniforme discreta em $\{1, 3\}$):

$$\mathbb{E}[D_t] = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(3) = 2, \quad \mathbb{E}[D_t^2] = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(9) = 5.$$

Esperança. Como $D_t \perp \varepsilon_t$ (independência):

$$\mathbb{E}[C_t] = \mathbb{E}[D_t \varepsilon_t] = \mathbb{E}[D_t] \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 2 \cdot 0 = 0.$$

Variância. Como $\mathbb{E}[C_t] = 0$, $\text{Var}(C_t) = \mathbb{E}[C_t^2]$:

$$\text{Var}(C_t) = \mathbb{E}[D_t^2 \varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[D_t^2] \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = 5 \cdot 1 = 5. \quad (\text{constante em } t)$$

Covariância para $k \neq 0$:

$$\text{Cov}(C_t, C_{t-k}) = \mathbb{E}[D_t D_{t-k} \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = \underbrace{\mathbb{E}[D_t] \mathbb{E}[D_{t-k}]}_{=2 \cdot 2=4} \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}]}_{=0} = 0.$$

(Independências: $D_t \perp D_{t-k}$ pois i.i.d.; $D \perp \varepsilon$ por hipótese; $\varepsilon_t \perp \varepsilon_{t-k}$ pois i.i.d. com $k \neq 0$.)

Todos os momentos constantes em $t \Rightarrow \{C_t\}$ é fracamente estacionário.

(d) **Diferença fundamental.**

Em B_t , o peso c_t é **determinístico** e *depende de t* : dado t , sabemos exatamente c_t (1 par, 3 ímpar). A distribuição de B_t *muda* entre t par e ímpar.

Em C_t , o peso D_t é **aleatório e i.i.d.**: tem a *mesma distribuição* em todo t ($P(D_t = 1) = P(D_t = 3) = 1/2$). A distribuição de C_t é a mesma em todo t .

Lição: estacionariedade não é propriedade da *trajetória* observada (ambos podem ter valores $1 \cdot \varepsilon$ e $3 \cdot \varepsilon$), é da *distribuição* subjacente. Regra determinística dependente de t quebra estacionariedade; regra aleatória i.i.d. preserva.

Gabarito Questão 11. (Mistura aleatória – passo a passo)

$y_t = \varepsilon_t + a_t \varepsilon_{t-1}$, com $a_t \in \{\alpha = 1/2, \beta = -1/3\}$, cada com probabilidade $1/2$, i.i.d. e independente de $\{\varepsilon_t\}$. $\varepsilon_t \sim$ i.i.d. $N(0, \sigma^2)$.

Momentos da v.a. a_t .

$$\mathbb{E}[a_t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$\mathbb{E}[a_t^2] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{18}.$$

Achando denominador comum (mmc(8,18)=72): $\frac{1}{8} = \frac{9}{72}$, $\frac{1}{18} = \frac{4}{72}$. Logo $\mathbb{E}[a_t^2] = \frac{13}{72}$.

Independência crucial: a_t depende só de π_t , que é independente de todas as ε 's e dos a_s com $s \neq t$.

(a) **Esperança.**

$$\mathbb{E}[y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \mathbb{E}[a_t \varepsilon_{t-1}] = 0 + \underbrace{\mathbb{E}[a_t]}_{1/12} \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}]}_0 = 0.$$

(b) **Variância $\gamma(0)$.**

Como $\mathbb{E}[y_t] = 0$, $\text{Var}(y_t) = \mathbb{E}[y_t^2]$. Elevando ao quadrado:

$$y_t^2 = (\varepsilon_t + a_t \varepsilon_{t-1})^2 = \varepsilon_t^2 + 2a_t \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + a_t^2 \varepsilon_{t-1}^2.$$

Esperança termo a termo:

- $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$.
- $\mathbb{E}[2a_t \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 2 \mathbb{E}[a_t] \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 2(1/12) \cdot 0 = 0$.
(usando $a_t \perp \varepsilon$'s, e $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 0$ por ruído branco)
- $\mathbb{E}[a_t^2 \varepsilon_{t-1}^2] = \mathbb{E}[a_t^2] \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \frac{13}{72} \sigma^2$.

Somando:

$$\gamma(0) = \sigma^2 + 0 + \frac{13}{72} \sigma^2 = \frac{72+13}{72} \sigma^2 = \frac{85}{72} \sigma^2 \approx 1,181 \sigma^2.$$

(c) $\gamma(1) = \text{Cov}(y_t, y_{t-1})$.

Como as médias são zero, $\gamma(1) = \mathbb{E}[y_t y_{t-1}]$. Escreva $y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + a_{t-1} \varepsilon_{t-2}$ e multiplique (4 termos):

$$\begin{aligned} y_t y_{t-1} &= (\varepsilon_t + a_t \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + a_{t-1} \varepsilon_{t-2}) \\ &= \underbrace{\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}_{(1)} + \underbrace{a_{t-1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-2}}_{(2)} + \underbrace{a_t \varepsilon_{t-1}^2}_{(3)} + \underbrace{a_t a_{t-1} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}}_{(4)}. \end{aligned}$$

Esperança de cada termo:

- (1) $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 0$ (índices distintos).
- (2) $\mathbb{E}[a_{t-1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-2}] = \mathbb{E}[a_{t-1}] \mathbb{E}[\varepsilon_t] \mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}] = 0$.
- (3) $\mathbb{E}[a_t \varepsilon_{t-1}^2] = \mathbb{E}[a_t] \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \frac{1}{12} \sigma^2$. **Único termo não-nulo.**
- (4) $\mathbb{E}[a_t a_{t-1} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}] = \mathbb{E}[a_t] \mathbb{E}[a_{t-1}] \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}] = (1/12)^2 \cdot 0 = 0$.

$$\gamma(1) = \frac{1}{12} \sigma^2.$$

$\gamma(k)$ para $k \geq 2$. y_t envolve $\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}\}$ (e a_t). y_{t-k} envolve $\{\varepsilon_{t-k}, \varepsilon_{t-k-1}\}$ (e a_{t-k}). Para $k \geq 2$, $\{t, t-1\} \cap \{t-k, t-k-1\} = \emptyset$. Todos os produtos cruzados em $y_t y_{t-k}$ têm ε 's com índices distintos \Rightarrow esperança zero.

$$\gamma(k) = 0 \quad \text{para } k \geq 2.$$

(d) **Estacionariedade.**

- $\mathbb{E}[y_t] = 0$, constante.
- $\text{Var}(y_t) = (85/72)\sigma^2$, depende só de σ^2 , α , β (fixos).
- $\gamma(k)$ depende só de k : $\gamma(0) = (85/72)\sigma^2$, $\gamma(1) = (1/12)\sigma^2$, $\gamma(k) = 0$ para $k \geq 2$.

$\{y_t\}$ é **fracamente estacionário**, com estrutura de autocovariância de MA(1) (corta em $k = 2$).

(e) Intuição. Cada *ramo isolado* é um MA(1) estacionário:

- Ramo $\pi_t = 1$: $y_t = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$ - MA(1) com $\theta = 1/2$.
- Ramo $\pi_t = 0$: $y_t = \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$ - MA(1) com $\theta = -1/3$.

A variável π_t “escolhe” aleatoriamente em qual ramo o processo está. Os π_t são **i.i.d. e independentes de ε** - a regra de seleção *não muda* com t . Como a distribuição condicional de y_t dado π_t não depende de t , e π_t tem mesma distribuição em todo t , a distribuição marginal de y_t também não muda com t . *Estacionariedade preservada.*

Contraste com Q10: lá, $B_t = c_t\varepsilon_t$ tinha peso **determinístico** dependente de $t \Rightarrow$ distribuição de B_t mudava entre t par e ímpar \Rightarrow quebra estacionariedade. Aqui, peso **aleatório** com distribuição constante \Rightarrow estacionariedade sobrevive.