Capítulo 6

Defasagens Distribuídas e Cointegração

Econometria II · UFBA

Prof. Pablo Castro

Roteiro

O que veremos

- Modelos com **defasagens distribuídas** (ARDL)
- Estimação e limitações do ARDL
- Efeitos de **curto** e **longo prazo**
- Revisão: regressão espúria
- **Cointegração**: a ideia e a definição
- Teste de **Engle-Granger**
- Modelo de **Correção de Erros** (VECM)

Mudança de perspectiva:

Nos capítulos anteriores, os modelos usavam apenas **defasagens da própria variável**. Agora vamos incluir defasagens de **outras variáveis** e descobrir como modelar séries $I(1)$ que "andam juntas".

Seção 6.1

Defasagens Distribuídas (ARDL)

Motivação

Nos modelos ARIMA, y_t dependia apenas de seus próprios valores passados. Na prática, várias variáveis econômicas dependem de **outras variáveis**, e essa influência ocorre **ao longo do tempo**.

Exemplos

Consumo das famílias depende de defasagens da **renda disponível**.

Investimento depende de defasagens da **taxa de juros** (Selic).

Inflação depende de defasagens do **câmbio** e do **hiato do produto**.

Importações dependem de defasagens do **PIB** e do **câmbio real**.

O efeito de x sobre y raramente é instantâneo e único: ele se **distribui ao longo de vários períodos**. Daí o nome "defasagens distribuídas".

ARDL

AR (Autorregressivo) + **DL** (Distributed Lag = Defasagens Distribuídas):

$$y_t = \mu + \underbrace{\phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p}}_{\textbf{AR}(\text{p}):\ \text{inércia de } y} + \underbrace{\eta_0 x_t + \eta_1 x_{t-1} + \cdots + \eta_m x_{t-m}}_{\textbf{DL}(\text{m}):\ \text{efeito de } x \text{ em } y} + u_t$$

AR — inércia de y

y de hoje depende de y de ontem.

Ex.: o consumo das famílias hoje depende do consumo de ontem (hábito).

DL — efeito de x ao longo do tempo

Um choque em x_t não afeta y só hoje: seu efeito se **espalha** pelos próximos m períodos.

Ex.: o consumo atual também depende da renda atual e da renda passada (formação de poupança no passado).

Lendo um ARDL(p, m): p = defasagens de y; m = defasagens de x *além* do contemporâneo; portanto temos $m + 1$ coeficientes em x.

Ex.: ARDL(2, 3) $\Rightarrow y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \eta_0 x_t + \eta_1 x_{t-1} + \eta_2 x_{t-2} + \eta_3 x_{t-3} + \varepsilon_t$.

Exemplo: ARDL bivariado

Estimou-se o consumo das famílias (C_t) como um ARDL(1,1) com a renda disponível (Y_t), dados trimestrais:

ARDL(1, 1) estimado

$$\widehat{C}_t = 12{,}3 + \underbrace{0{,}45\, C_{t-1}}_{\substack{\text{inércia:} \\ \text{hábito de consumo}}} + \underbrace{0{,}38\, Y_t}_{\substack{\text{efeito} \\ \text{imediato}}} + \underbrace{0{,}21\, Y_{t-1}}_{\substack{\text{efeito} \\ \text{defasado}}}$$

- $\hat{\phi} = 0{,}45$: 45% do consumo de ontem persiste. Famílias demoram para ajustar hábitos de consumo.
- $\hat{\eta}_0 = 0{,}38$: R$1 a mais de renda hoje $\Rightarrow$ consumo sobe R$ 0,38 **neste mesmo trimestre** (efeito imediato).
- $\hat{\eta}_1 = 0{,}21$: mais R$ 0,21 chegam **no trimestre seguinte** — nem toda família ajusta o consumo imediatamente.

ARDL com múltiplas variáveis explicativas

Nada impede ter **várias** variáveis x, cada uma com seu histórico de defasagens:

$$\begin{aligned} y_t = \mu + \underbrace{\phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p}}_{\text{AR}(p)} + \underbrace{\eta_0 x_{1t} + \cdots + \eta_{m_1} x_{1,t-m_1}}_{\text{DL}(m_1)} \\ + \underbrace{\gamma_0 x_{2t} + \cdots + \gamma_{m_2} x_{2,t-m_2}}_{\text{DL}(m_2)} + \cdots + u_t \end{aligned} \tag{1}$$

Exemplo: IPCA, ARDL$(1,1,1)$ — câmbio e desemprego

$$\widehat{\pi}_t = \mu + \underbrace{0{,}52\,\pi_{t-1}}_{\text{inércia}} + \underbrace{0{,}18\,\Delta e_t + 0{,}12\,\Delta e_{t-1}}_{\text{câmbio}} - \underbrace{0{,}09\,u_t + 0{,}06\,u_{t-1}}_{\text{desemprego}}$$

- $\hat{\phi} = 0{,}52$: inflação tem forte inércia — metade da inflação de ontem persiste hoje.
- Câmbio: desvalorização de 1% $\Rightarrow$ IPCA sobe 0,18 p.p. agora + 0,12 p.p. no mês seguinte.
- Desemprego: 1 p.p. a mais $\Rightarrow$ IPCA cai 0,09 p.p. (menor pressão de demanda).
- Cada x tem seu próprio m_k — não precisam ter o mesmo número de defasagens.

Estimação: quando MQO funciona?

Se os erros u_t são bem-comportados e x_t é estritamente exógeno, os coeficientes do ARDL podem ser estimados por **MQO**.

Mas há complicações:

Problemas potenciais do ARDL

1. **Multicolinearidade:** x_t e x_{t-1} são fortemente correlacionados. Os erros-padrão dos $\hat{\eta}_j$ ficam inflados – as estimativas individuais são imprecisas, mesmo que o efeito total seja bem identificado.
2. **Graus de liberdade:** cada defasagem adicional consome **dois** graus de liberdade (um parâmetro extra + uma observação inicial perdida). Em amostras pequenas, isso esgota o poder estatístico rapidamente.
3. **Raiz unitária:** se y_t ou x_t não forem estacionários, MQO em nível produz regressão espúria. O ARDL é adequado para séries **estacionárias**.

Seção 6.2

Impactos de Curto e Longo Prazo

Efeito de curto prazo

Considere, inicialmente, um ARDL$(1,0)$: $y_t = \phi\, y_{t-1} + \eta\, x_t + u_t$, com $|\phi| < 1$.

Efeito de curto prazo (impacto imediato)

Um aumento de 1 unidade em x_t aumenta y_t em $\boxed{\eta}$ no mesmo período: $\partial y_t / \partial x_t = \eta$.

O efeito se propaga. Como y_t aparece em y_{t+1} via $\phi\, y_t$, o choque em x_t continua afetando os períodos seguintes.

Consumo e Renda: $\hat{C} = 12{,}3 + 0{,}45 C_{t-1} + 0{,}38 Y_t$. Um aumento de 1 real na renda corrente aumenta o consumo corrente em 38 centavos ($\eta = 0{,}38 > 0$), mas a expansão continua nos trimestres seguintes via inércia. O efeito acumulado no longo prazo excede o impacto imediato.

Efeito de longo prazo

Cenário: ainda considerando um ARDL(1,0), x sobe 1 unidade em t e permanece nesse nível. O que acontece com y?

Passo 1 – Período t: $\Delta y_t = \eta$

Passo 2 – Período $t+1$: o aumento η em y_t se propaga via ϕ $(\Delta x_{t+1} = 0)$:

$$\Delta y_{t+1} = \phi \cdot \underbrace{\Delta y_t}_{=\eta} = \phi\,\eta$$

Passo 3 – Período $t+h$ (por indução): $\Delta y_{t+h} = \phi^h\,\eta$

A cada período, o efeito residual é ϕ vezes o do anterior. Como $|\phi| < 1$, decai a zero. A parte AR do modelo é responsável pela propagação do efeito de x em y ao longo do tempo.

Efeito de total: efeito de curto + longo prazo

Ainda no nosso exemplo do ARDL(1,0), o **efeito total** acumulado de um choque permanente de 1 unidade em x é:

$$\eta + \phi\,\eta + \phi^2\,\eta + \cdots \;=\; \eta\,(1 + \phi + \phi^2 + \cdots)$$

Sob $|\phi| < 1$, a série geométrica converge:

$$\boxed{\textit{Efeito de longo prazo} \;=\; \frac{\eta}{1-\phi}}$$

Propriedades:

- $\phi = 0$: sem inércia; efeito de longo praz0 $= \eta =$ efeito de curto prazo.
- **Multiplicador de longo prazo:** $1/(1-\phi)$.

Efeitos de curto e longo prazo: definições

Seja o modelo ARDL(p, m): $y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \eta_0 x_t + \eta_1 x_{t-1} + \cdots + \eta_m x_{t-m} + u_t$

Efeito de curto prazo (ECP)

$$\text{ECP} = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \eta_0$$

Multiplicador acumulado em h

$$M_h = \sum_{j=0}^{h} \frac{\partial y_{t+j}}{\partial x_t}$$

Efeito de longo prazo (ELP)

$$\text{ELP} = \lim_{h \to \infty} M_h = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial y_{t+j}}{\partial x_t}$$

Efeito total de um choque permanente unitário em x sobre y.

ELP: equilíbrio de longo prazo (1/3)

Há uma forma mais intuitiva de calcular o ELP. **Ideia:** no equilíbrio de longo prazo,

$$y_t = y_{t-1} = \cdots = y^* \qquad \text{e} \qquad x_t = x_{t-1} = \cdots = x^*.$$

Considere o modelo ADL(p, m):

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{m} \eta_j x_{t-j} + u_t$$

Substituindo as condições de equilíbrio no modelo:

$$y^* = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y^* + \sum_{j=0}^{m} \eta_j x^*$$

Como y^* e x^* são constantes, podemos fatorar:

$$y^* = \mu + \left(\sum_{i=1}^{p} \phi_i \right) y^* + \left(\sum_{j=0}^{m} \eta_j \right) x^*$$

ELP: equilíbrio de longo prazo (2/3)

Partindo de

$$y^* = \mu + \left(\sum_{i=1}^{p} \phi_i\right) y^* + \left(\sum_{j=0}^{m} \eta_j\right) x^*$$

reorganizamos os termos:

$$y^* - \left(\sum_{i=1}^{p} \phi_i\right) y^* = \mu + \left(\sum_{j=0}^{m} \eta_j\right) x^*$$

$$y^* \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i\right) = \mu + \left(\sum_{j=0}^{m} \eta_j\right) x^*$$

$$y^* = \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i} + \frac{\sum_{j=0}^{m} \eta_j}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i} x^*$$

ELP: equilíbrio de longo prazo (3/3)

Da expressão obtida no slide anterior,

$$y^* = \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i} + \frac{\sum_{j=0}^{m} \eta_j}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i} x^*$$

podemos definir:

$$\alpha = \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i} \qquad \text{e} \qquad \beta^* = \frac{\sum_{j=0}^{m} \eta_j}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

Assim, a relação de equilíbrio de longo prazo pode ser escrita como:

$$y^* = \alpha + \beta^* x^*$$

Interpretação

O **ELP** é o coeficiente de x^* na equação de equilíbrio: ELP $= \beta^* = \frac{\sum_{j=0}^{m} \eta_j}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$

Logo, uma variação permanente de 1 unidade em x altera o nível de longo prazo de y em β^* unidades.

Aplicação: ARDL(1,0)

Considere o modelo:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \eta_0 x_t + u_t$$

No equilíbrio de longo prazo,

$$y_t = y_{t-1} = y^* \qquad \text{e} \qquad x_t = x^*$$

Substituindo no modelo:

$$y^* = \mu + \phi_1 y^* + \eta_0 x^*$$

Isolando y^*:

$$y^*(1 - \phi_1) = \mu + \eta_0 x^*$$
$$y^* = \frac{\mu}{1 - \phi_1} + \frac{\eta_0}{1 - \phi_1} x^*$$

Efeito de longo prazo

$$\text{ELP} = \frac{\eta_0}{1 - \phi_1}$$

Aplicação: ARDL(1,1)

Considere o modelo:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \eta_0 x_t + \eta_1 x_{t-1} + u_t$$

No equilíbrio de longo prazo,

$$y_t = y_{t-1} = y^* \qquad \text{e} \qquad x_t = x_{t-1} = x^*$$

Substituindo no modelo:

$$y^* = \mu + \phi_1 y^* + \eta_0 x^* + \eta_1 x^*$$

Agrupando os termos em x^*:

$$y^* = \mu + \phi_1 y^* + (\eta_0 + \eta_1)x^*$$

Isolando y^*:

$$y^*(1 - \phi_1) = \mu + (\theta_0 + \eta_1)x^*$$
$$y^* = \frac{\mu}{1 - \phi_1} + \frac{\eta_0 + \eta_1}{1 - \phi_1}x^*$$

Efeito de longo prazo

$$\text{ELP} = \frac{\eta_0 + \eta_1}{1 - \phi_1}$$

Seção 6.3

Regressão Espúria e Cointegração

Recapitulando: regressão espúria

Já vimos no Cap. 2: regredir uma série $I(1)$ em outra $I(1)$ **independente** produz resultados enganosos – R^2 alto e t-estatísticas significativas, mesmo sem relação real.

Por que isso ocorre?

Duas séries $I(1)$ acumulam choques ao longo do tempo. Se ambas crescem, terão alta correlação por construção, sem nenhuma relação causal. A distribuição da estatística t não é a usual – os valores críticos normais não valem.

Duas saídas:

Solução 1: diferenciar

Trabalhar com Δy_t e Δx_t, que são $I(0)$. Problema: **perde-se informação de longo prazo**.

Solução 2: cointegração

Se y_t e x_t têm uma **relação de longo prazo**, podemos usar essa estrutura diretamente. Isso não descarta informação. É o que faremos agora.

Cointegração

Definição

Duas séries y_t e x_t, ambas $I(1)$, são **cointegradas** se existe uma combinação linear entre elas que é **estacionária**:

$$u_t = y_t - \mu - \eta x_t \sim I(0)$$

O vetor $(1, -\eta)$ é o **vetor de cointegração**.

Em palavras: embora y_t e x_t "passeiem" aleatoriamente (cada uma faz seu próprio passeio), a **distância entre elas** é estacionária – gravita em torno de uma constante.

Analogia

Dois bêbados saindo de um bar. Cada um caminha de forma imprevisível ($I(1)$). Se um tem um cachorro com uma coleira curta, os dois se mantêm próximos – a distância entre eles é estacionária. Eles estão "cointegrados". (Granger, 1981)

Cointegração

Se y_t e x_t são cointegradas, existe uma **relação de equilíbrio de longo prazo**:

$$y_t = \mu + \eta x_t + u_t$$

u_t mede o **desvio do equilíbrio**:

- $u_t > 0$: y_t está **acima** do equilíbrio.
- $u_t < 0$: y_t está **abaixo** do equilíbrio.
- Como $u_t \sim I(0)$, esses desvios são **transitórios** – o equilíbrio é restaurado.

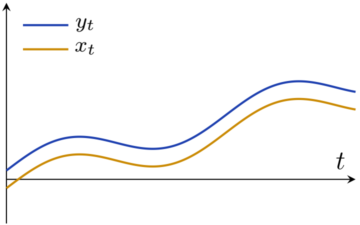
Exemplos

Consumo e renda (Brasil): ambos são $I(1)$, mas a propensão marginal a consumir gravita em torno de $\sim 0{,}80$. A relação de longo prazo existe.

Preços de ativos relacionados (PETR3 e PETR4): ambas as ações da Petrobras tendem a se mover juntas no longo prazo.

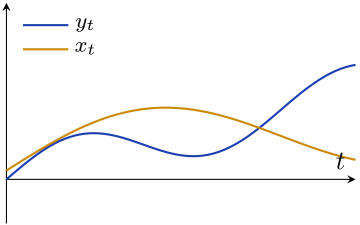
Visualizando: séries cointegradas vs. independentes

Cointegradas



Ambas têm tendência, mas **andam juntas**.
A diferença $y_t - x_t$ é estacionária.

Não cointegradas



Ambas têm tendência, mas **se descolam**.
Nenhum equilíbrio de longo prazo.

A regressão de longo prazo (Engle-Granger, 1987)

Se y_t e x_t são $I(1)$ e cointegradas, podemos regredir y_t em x_t em nível. O MQO é **super-consistente**: converge muito mais rápido que o usual.

$$y_t = \hat{\mu} + \hat{\eta}\, x_t + \hat{u}_t$$

Interpretando $\hat{\eta}$ e $\hat{u}_t$

- $\hat{\eta}$: coeficiente de longo prazo – quanto y muda em equilíbrio por unidade a mais em x.
- $\hat{u}_t = y_t - \hat{\mu} - \hat{\eta}\, x_t$: desvio do equilíbrio. Se cointegradas, $\hat{u}_t \sim I(0)$.

Atenção: se as séries **não** são cointegradas, a regressão é espúria e $\hat{\eta}$ não tem interpretação válida. **Testar cointegração** é o passo anterior obrigatório.

Teste de Engle-Granger: o teste de cointegração

Procedimento em 3 passos

1. Teste de **raiz unitária** em y_t e x_t (ADF). Ambas $I(1)$: prosseguir.
2. **Regressão de longo prazo** por MQO, salvar resíduos: $y_t = \hat{\mu} + \hat{\eta}\, x_t + \hat{u}_t$
3. **ADF nos resíduos** $\hat{u}_t$:
   H_0: raiz unitária (sem cointegração). Rejeitar $\Rightarrow \hat{u}_t \sim I(0) \Rightarrow$ **cointegração**.

Valores críticos especiais

Os valores críticos para ADF nos resíduos **não são os mesmos** do ADF padrão: são **mais negativos**. Dependem do número de variáveis. MacKinnon (1996).

Por que os valores críticos são diferentes?

No ADF padrão: testamos a série original y_t diretamente.

No teste de Engle-Granger: testamos os **resíduos estimados** $\hat{u}_t = y_t - \hat{\mu} - \hat{\eta}\, x_t$. Esses resíduos foram construídos para ter a **menor variância possível** (MQO minimiza $\sum \hat{u}_t^2$), o que os torna artificialmente mais "estacionários" do que a série verdadeira.

Consequência: ao aplicar ADF em $\hat{u}_t$, o teste rejeita H_0 com mais facilidade do que deveria. Para compensar, os valores críticos de Engle-Granger são **mais negativos** – exige-se evidência mais forte para concluir cointegração.

Teste	**Crítico 5%**	**Quando usar**
ADF padrão (sem tendência)	$-2{,}87$	raiz unitária em y_t ou x_t
Engle-Granger (2 variáveis)	$\approx -3{,}34$	ADF nos resíduos $\hat{u}_t$

Exemplo: Engle-Granger para PETR3 e PETR4

Dados: preços diários em log de PETR3.SA e PETR4.SA, jan/2010–dez/2023 ($N = 3473$). Hipótese econômica: ON e PN da mesma empresa deveriam cointegrar.

Etapa 1 — Raiz unitária (VC ADF 5% $= -2{,}862$):

Série	Modelo ADF	t-stat	Conclusão
$\log p_{3,t}$ (nível)	com constante, 16 lags	$-0{,}605$	$> -2{,}862$: raiz unitária ✓
$\log p_{4,t}$ (nível)	com constante, 7 lags	$-0{,}551$	$> -2{,}862$: raiz unitária ✓
$\Delta \log p_{3,t}$	com constante, 15 lags	$-14{,}727$	$< -2{,}862$: estacionária ✓
$\Delta \log p_{4,t}$	com constante, 6 lags	$-20{,}514$	$< -2{,}862$: estacionária ✓

Etapa 2 — Regressão de longo prazo:

$$\hat{p}_{3,t} = 0{,}205 + 0{,}963\, p_{4,t} + \hat{u}_t, \qquad R^2 = 0{,}976$$

Etapa 3 — ADF nos resíduos (VC Engle-Granger 5% $= -3{,}34$):

$$\text{ADF}(\hat{u}_t) = -2{,}461 \; > \; -3{,}34 \;\Rightarrow\; \text{não rejeita } H_0 \;\Rightarrow\; \hat{u}_t \sim I(1)$$

Conclusão: sem evidência de cointegração a 5%. Apesar do $R^2 = 0{,}976$, a regressão é espúria: resíduos não estacionários. **Lição:** R^2 alto entre séries $I(1)$ *não* garante relação genuína. A relação ON/PN da Petrobras pode ter mudado estruturalmente ao longo de 13 anos.

Replicando em Python: PETR3 e PETR4

Os alunos podem replicar o exemplo anterior com o código abaixo:

```
import yfinance as yf, numpy as np, pandas as pd
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller
from statsmodels.regression.linear_model import OLS
from statsmodels.tools import add_constant

p3 = np.log(yf.download("PETR3.SA","2010-01-01","2023-12-31",
            auto_adjust=True, progress=False)["Close"]).squeeze()
p4 = np.log(yf.download("PETR4.SA","2010-01-01","2023-12-31",
            auto_adjust=True, progress=False)["Close"]).squeeze()
df = pd.DataFrame({"p3":p3,"p4":p4}).dropna()

for name, s in [("p3",df.p3),("p4",df.p4)]:
    r = adfuller(s, regression='c', autolag='AIC')
    print(f"ADF nivel {name}: stat={r[0]:.3f}, VC5%={r[4]['5%']:.3f}")

res = OLS(df.p3, add_constant(df.p4)).fit()
print(f"LP: p3 = {res.params.iloc[0]:.3f} + {res.params[1]:.3f}*p4")

r = adfuller(res.resid, regression='n', autolag='AIC')
print(f"ADF residuos: stat={r[0]:.3f}  (VC EG 5% = -3.34)")
```

Instalar: `pip install yfinance statsmodels`. Experimente outros tickers: `VALE3.SA`, `BBDC3.SA`/`BBDC4.SA`.

Seção 6.4

Modelo de Correção de Erros (VECM)

VECM: motivação e definição

Se y_t e x_t são $I(1)$ e cointegradas, poderíamos diferenciar as duas séries e estimar em $I(0)$, porém **perderíamos a relação de equilíbrio**.

O **modelo de correção de erros** captura tanto a dinâmica de curto prazo quanto a tendência de longo prazo ao equilíbrio.

VECM

$$\Delta y_t = \mu^* + \eta_0 \Delta x_t + \lambda \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$$

em que $\hat{u}_{t-1} = y_{t-1} - \hat{\mu} - \hat{\eta} x_{t-1}$ é o resíduo defasado da regressão de longo prazo.

Interpretação de cada termo:

- $\eta_0 \Delta x_t$: efeito de **curto prazo** de mudanças em x sobre mudanças em y.
- $\hat{u}_{t-1}$: **desvio do equilíbrio** no período anterior.
- λ: **velocidade de ajustamento**. Deve ser $-1 < \lambda < 0$.

VECM: mecanismo de correção

Por que γ deve ser negativo?

Suponha que no período $t-1$, y estava **acima** do equilíbrio: $\hat{u}_{t-1} > 0$.

$$\Delta y_t = \mu^* + \eta_0 \, \Delta x_t + \lambda \underbrace{\hat{u}_{t-1}}_{>0} + \varepsilon_t$$

Se $\lambda < 0$, o termo $\lambda \, \hat{u}_{t-1}$ é **negativo** – empurra Δy_t para baixo, **corrigindo o desvio**.

Da mesma forma, se $\hat{u}_{t-1} < 0$ (y abaixo do equilíbrio), $\lambda \, \hat{u}_{t-1} > 0$ – empurra Δy_t para cima.

Estabilidade: $-1 < \lambda < 0$ garante convergência. Se $\lambda < -1$: superajuste (oscilação crescente). Se $\lambda \geq 0$: desvio não é corrigido.

ECM: derivação algébrica a partir do ARDL(1,1)

Parta do ARDL(1,1):

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \eta_0 x_t + \eta_1 x_{t-1} + u_t$$

Subtraindo y_{t-1} dos dois lados e somando/subtraindo $\eta_0 x_{t-1}$:

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= \mu + (\phi_1 - 1) y_{t-1} + \eta_0 x_t + \eta_1 x_{t-1} + u_t \\
&= \mu + (\phi_1 - 1) y_{t-1} + \eta_0 (x_t - x_{t-1}) + (\eta_0 + \eta_1) x_{t-1} + u_t \\
&= \mu + \eta_0 \Delta x_t + (\phi_1 - 1) y_{t-1} + (\eta_0 + \eta_1) x_{t-1} + u_t
\end{aligned}$$

Fatorando $(\phi_1 - 1)$:

$$\Delta y_t = \mu + \eta_0 \Delta x_t + (\phi_1 - 1) \left[y_{t-1} - \frac{\eta_0 + \eta_1}{1 - \phi_1} x_{t-1} \right] + u_t$$

Forma VECM

$$\boxed{\Delta y_t = \mu + \eta_0 \Delta x_t + \lambda \Big(y_{t-1} - \eta_{\text{LP}}\, x_{t-1} \Big) + u_t}$$

$$\lambda = \phi_1 - 1 < 0, \qquad \eta_{\text{LP}} = \frac{\eta_0 + \eta_1}{1 - \phi_1} = \text{ELP}$$

Aqui, η_0 é o efeito de curto prazo e η_{LP} é o efeito de longo prazo.

VECM: estimação em 2 estágios (Engle-Granger)

Estágio 1: regressão de longo prazo (em nível)

$$y_t \;=\; \hat{\mu} \;+\; \hat{\eta}\, x_t \;+\; \hat{u}_t$$

Guardar os resíduos $\hat{u}_t$ (desvio do equilíbrio). Fornece $\hat{\eta}$ (coeficiente de longo prazo).

Estágio 2: regressão de curto prazo (em diferenças)

$$\Delta y_t \;=\; \mu^* \;+\; \eta_0\, \Delta x_t \;+\; \lambda\, \hat{u}_{t-1} \;+\; \varepsilon_t$$

Fornece $\hat{\eta}_0$ (efeito de curto prazo) e $\hat{\lambda}$ (velocidade de ajustamento).

Resultado: um único modelo com **longo prazo** $(\hat{\eta})$ + **curto prazo** $(\hat{\eta}_0)$ + **ajustamento** $(\hat{\lambda})$.

VECM: exemplo numérico

Dados: consumo (C_t) e renda (Y_t) das famílias brasileiras, ambos $I(1)$ e cointegrados.

Estágio 1 – Regressão de longo prazo:

$$\hat{C}_t \;=\; 0{,}20 \;+\; 0{,}78\,Y_t, \qquad \hat{u}_t \;=\; C_t - 0{,}20 - 0{,}78\,Y_t$$

$\hat{\eta} = 0{,}78$: no longo prazo, 78 centavos de cada real a mais na renda vão para consumo.

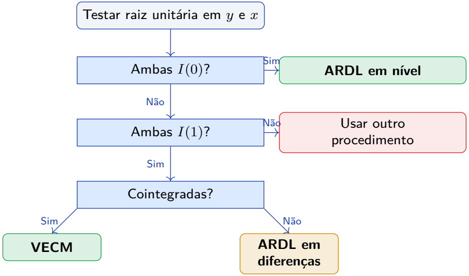
Estágio 2 – VECM:

$$\Delta C_t \;=\; 0{,}05 \;+\; 0{,}62\,\Delta Y_t \;-\; 0{,}25\,\hat{u}_{t-1} \;+\; \varepsilon_t$$

Interpretação:

- **Curto prazo** ($\hat{\eta}_0 = 0{,}62$): um aumento de 1 real na renda eleva o consumo em 0,62 reais no mesmo período.
- **Velocidade** ($\hat{\lambda} = -0{,}25$): 25% do desvio do equilíbrio é corrigido a cada período.
- **Se** $\hat{u}_{t-1} = 1{,}0$ (consumo 1 real acima do equilíbrio): a correção é $-0{,}25 \times 1{,}0 = -0{,}25$ reais no crescimento do consumo.

Fluxograma de decisão: ARDL ou VECM?



Situação	Modelo	Dados
Ambas $I(0)$	ARDL	nível
$I(1)$, coint.	VECM	nível + dif.
$I(1)$, s/ coint.	ARDL	diferenças

Exercícios

Enunciado

Considere o modelo $C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_t$, em que C_t é consumo, Y_t é renda. Julgue como Verdadeiro (V) ou Falso (F):

(a) Se C_t e Y_t são $I(1)$, então u_t será obrigatoriamente estacionário.

(b) Se C_t e Y_t são integradas com ordens de integração **diferentes**, a regressão é inválida.

(c) Se C_t e Y_t são $I(1)$, o teste ADF aplicado aos resíduos da regressão poderá identificar cointegração.

(d) Se C_t e Y_t são $I(1)$ e os resíduos são $I(0)$, há cointegração.

(e) Se C_t e Y_t são $I(1)$ e os resíduos também são $I(1)$, a regressão de ΔC_t em ΔY_t é inválida.

(a) F u_t é estacionário **apenas se** as séries cointegram. Se não cointegram, $u_t \sim I(1)$ e a regressão é espúria.

(b) V Para cointegração, as séries precisam ter **mesma ordem de integração**. Com ordens diferentes, não existe combinação linear $I(0)$.

(c) V Essa é a essência do teste de Engle-Granger: estimar a regressão em nível e aplicar ADF aos resíduos.

(d) V Por definição: C_t e Y_t cointegram se e só se a combinação linear $C_t - \alpha_0 - \alpha_1 Y_t$ for $I(0)$.

(e) F Se os resíduos são $I(1)$, as séries **não** cointegram. Mas a regressão de ΔC_t em ΔY_t é **válida** – estamos regredindo séries $I(0)$ em séries $I(0)$. A ressalva é que descartamos a relação de longo prazo.

Síntese: cointegração é a propriedade de "u_t ser $I(0)$ apesar de C_t e Y_t serem $I(1)$". Sem essa propriedade, diferenciamos tudo para estimar em $I(0)$.

Enunciado

Resultados ADF:

$\widehat{\Delta Y_t} = 4{,}88 - 0{,}15\, Y_{t-1}$ (t-stat $= -1{,}97$)

$\widehat{\Delta X_t} = 0{,}11 - 0{,}18\, X_{t-1}$ (t-stat $= -2{,}21$)

$Y_t = 23{,}39 - 14{,}40\, X_t + \hat{e}_t$

$\widehat{\Delta \hat{e}_t} = 0{,}07 - 0{,}42\, \hat{e}_{t-1}$ (t-stat $= -3{,}43$)

Valor crítico DF a 5%: $-2{,}938$.

É **correto** afirmar (uma resposta):

(a) Y_t e X_t são $I(1)$.

(b) A regressão de Y_t em X_t é espúria.

(c) Não há cointegração entre Y_t e X_t.

(d) Para cointegração, as séries precisam ter mesma ordem de integração.

Resposta correta: (d)

(a) F ADF de Y e X $(-1{,}97$ e $-2{,}21)$ ambos $> -2{,}938 \Rightarrow$ raiz unitária. Para confirmar $I(1)$ precisaríamos testar as diferenças.

(b) F ADF dos resíduos: $-3{,}43 < -2{,}938 \Rightarrow$ resíduos estacionários $\Rightarrow$ **há cointegração** $\Rightarrow$ regressão **não** é espúria.

(c) F Mesmo argumento: $-3{,}43 < -2{,}938 \Rightarrow$ **há** cointegração.

(d) V Por definição: ordens diferentes $\Rightarrow$ sem combinação linear $I(0)$.

Enunciado

Em relação aos modelos de séries temporais, é **correto** afirmar que:

(a) No AR(1) $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t + \theta_0$, com $|\phi| < 1$, θ_0 é a média do processo.

(b) No ARMA(1,1) podemos escrever $Z_t = \phi Z_t + u_t - \theta u_{t-1}$.

(c) Se um processo tem tendência determinística $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$, é não estacionário e sua não estacionariedade é detectável por teste de raiz unitária.

(d) Em regressão com duas séries $I(1)$ **cointegradas**, pode-se usar a estatística t de Student.

(e) O teste de Engle-Granger para 3 variáveis usa os valores críticos de Dickey-Fuller.

Resposta correta: (d)

(a) F A média do AR(1) $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t + \theta_0$ é $\theta_0/(1-\phi)$, não θ_0.

(b) F Erro de notação: Z_t no lado direito deveria ser Z_{t-1}. A forma correta é $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t - \theta u_{t-1}$.

(c) F O processo é não estacionário (tem tendência determinística), mas **não se detecta** isso com teste de raiz unitária, pois não há componente AR. A tendência aqui é **determinística**, não estocástica. Usa-se regressão em t.

(d) V Sob cointegração, os resíduos são $I(0)$ e a inferência usual (estatística t) é **válida**.

(e) F Engle-Granger é apropriado para **2 variáveis**. Para 3 ou mais variáveis, o número de possíveis vetores de cointegração é maior que 1 e deve-se usar o teste de **Johansen**.

Enunciado

Dois economistas analisam demanda de moeda (m) e renda (y) em logaritmos:

Econ. A: $m_t = 1{,}099\, y_t + \hat{u}_t$ **Econ. B:** $\Delta m_t = 1{,}14\, \Delta y_t + \hat{e}_t$

Resultados ADF (crítico a 5%: $-2{,}886$):

Variável	m_t	y_t	$\hat{u}_t$	Δm_t	Δy_t	$\hat{e}_t$
ADF	$-2{,}19$	$-1{,}95$	$-2{,}99$	$-5{,}58$	$-6{,}31$	$-8{,}46$

Julgue (V ou F):

(a) m_t e y_t são $I(1)$.

(b) Se cointegradas, o Economista B deve incluir $\hat{u}_{t-1}$ no modelo.

Ambas Verdadeiras.

Item (a):

ADF$(m_t) = -2{,}19 > -2{,}886 \Rightarrow$ não rejeita $H_0 \Rightarrow$ raiz unitária.
ADF$(\Delta m_t) = -5{,}58 < -2{,}886 \Rightarrow$ rejeita $H_0 \Rightarrow \Delta m_t$ estacionária.
1 diferença para estacionar $\Rightarrow m_t \sim I(1)$. Idem para y_t. ✓

Item (b):

ADF de $\hat{u}_t = -2{,}99 < -2{,}886 \Rightarrow$ resíduos estacionários $\Rightarrow$ cointegração. O Economista B regride em diferenças mas **ignora a relação de longo prazo**.
A especificação correta é o VECM:

$$\Delta m_t = \mu^* + \eta_0\, \Delta y_t + \lambda\, \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$$

O termo $\hat{u}_{t-1}$ captura a correção ao equilíbrio. Sem ele, o modelo é incompleto. ✓

Enunciado

Com respeito à teoria de séries temporais e cointegração, julgue (V ou F):

(a) No modelo $Y_t - Y_{t-1} = \delta Y_{t-1} + u_t$, em que $\delta = \rho - 1$ e u_t é ruído branco, se $\delta = 0$ então Y_t é não estacionário.

(b) Numa regressão linear simples de duas séries $I(1)$ não cointegradas, o teste t de Student é válido.

(c) Numa regressão de séries $I(1)$ **cointegráveis**, não há risco de os resultados serem espúrios.

(d) Numa regressão de séries $I(1)$ cointegráveis, os resíduos da regressão são estacionários.

(e) Se uma série temporal precisa ser diferenciada n vezes para se tornar estacionária, a série original é integrada de ordem $n - 1$.

(a) V Se $\delta = 0$, então $\rho = 1$: o processo tem raiz unitária e é não estacionário. O modelo $\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t$ é a formulação do teste ADF, e $H_0 : \delta = 0$ é exatamente a hipótese de raiz unitária.

(b) F Sem cointegração, as séries $I(1)$ produzem **regressão espúria**. As estatísticas t convencionais não têm distribuição-t assintótica. O teste é inválido.

(c) V Quando as séries são cointegradas, o resíduo $\hat{u}_t \sim I(0)$ e os resultados da regressão são válidos. Não há espúria.

(d) V Por definição de cointegração: a combinação linear $y_t - \mu - \eta x_t$ é $I(0)$ – ou seja, os resíduos são estacionários.

(e) F Se a série precisa de n diferenças para ser estacionária, ela é integrada de ordem n, não $n - 1$. Por definição: $y_t \sim I(n)$ se $\Delta^n y_t \sim I(0)$.

Resumo do Capítulo 6

ARDL

- Inclui defasagens de outras variáveis
- ECP $= \eta$; ELP $= \eta/(1-\phi)$
- Multiplicador de longo prazo $= 1/(1-\phi)$
- Para séries $I(0)$ (ou $I(1)$ em diferenças)

Cointegração

- Séries $I(1)$ com relação de equilíbrio de longo prazo
- $u_t = y_t - \mu - \eta x_t \sim I(0)$
- Teste de Engle-Granger: ADF nos resíduos (valores críticos especiais!)

VECM

- Combina curto prazo ($\eta_0\,\Delta x_t$) com longo prazo ($\hat{u}_{t-1}$)
- $\lambda \in (-1, 0)$: velocidade de ajustamento
- Estimação em 2 estágios (Engle-Granger)

Sequência de decisão:

1. Testar raiz unitária ($I(0)$ ou $I(1)$?)
2. Se $I(1)$: testar cointegração
3. Cointegração $\rightarrow$ VECM
4. Sem cointegração $\rightarrow$ ARDL em diferenças

Ponto central: não diferencie $I(1)$ sem testar cointegração. Se houver, o VECM captura curto e longo prazo. Diferenciar tudo descarta informação de longo prazo.

Dúvidas?

Próxima aula: Autorregressão Vetorial (Cap. 7)