

Capítulo 3

Processos com Tendência Determinística

Econometria II · UFBA

Prof. Pablo Castro

Aula 1

- O que é tendência determinística?
- Modelos aditivo e multiplicativo
- Processo *trend-stationary*
- Notação SARIMA

Aula 2

- Decomposição manual
- Estimação da tendência
- Componente sazonal
- Decomposição automática

Aula 3

- Filtro HP (Hodrick-Prescott)
- PIB potencial e hiato do PIB
- Suavização: médias móveis
- Resumo do capítulo

Onde estamos? ✓ Processos estacionários (Cap. 1) ✓ Processos não estacionários e raiz unitária (Cap. 2) → **Tendência determinística (Cap. 3)** Box-Jenkins (Cap. 4)

Seção 3.1

Tendência Determinística

Recapitulando:

No **Capítulo 2** vimos: se uma série não é estacionária por causa de **raiz unitária**, basta diferenciar.

Nesse capítulo, vamos tratar um **segundo tipo** de não-estacionariedade: quando a série cresce ao longo do tempo de forma **previsível**, sem raiz unitária.

Tendência **estocástica** (Cap. 2)

Choques são **permanentes**.

Exemplo: $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ (passeio aleatório)

⇒ **Tratamento**: diferenciar.

Tendência **determinística** (Cap. 3)

Choques são **temporários**.

Exemplo: $y_t = \mu + \gamma t + u_t$ (linha + ruído)

⇒ **Tratamento**: remover a tendência.

Atenção

Diferenciar uma série com tendência determinística pode criar um novo problema: introduzir autocorrelação artificial nos erros. Vamos aprender a distinguir.

O que acontece ao diferenciarmos uma série com tendência determinística?

Seja a série $y_t = \mu + \gamma t + u_t$ com tendência determinística, onde $u_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Suponha que, por engano, você diferencia essa série em vez de fazer o *detrend*.

Passo 1 — Escreva a série em t e em $t - 1$:

$$\begin{aligned}y_t &= \mu + \gamma t + u_t \\y_{t-1} &= \mu + \gamma(t - 1) + u_{t-1}\end{aligned}$$

Passo 2 — Subtraia: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

$$\Delta y_t = (\mu + \gamma t + u_t) - (\mu + \gamma(t - 1) + u_{t-1})$$

Passo 3 — Cancele os termos iguais:

$$\Delta y_t = \cancel{\mu} + \cancel{\gamma t} + u_t - \cancel{\mu} - \cancel{\gamma} + \gamma - u_{t-1}$$

Resultado

$$\Delta y_t = \gamma + \underbrace{u_t - u_{t-1}}_{\Delta u_t}$$

O que acontece ao diferenciarmos uma série com tendência determinística?

Sabemos que os choques u_t tem variância σ^2 e são independentes entre si (*i.i.d.*), portanto, $\text{Cov}(u_t, u_s) = 0$ para qualquer $t \neq s$.

Queremos calcular $\text{Cov}(\Delta u_t, \Delta u_{t-1})$:

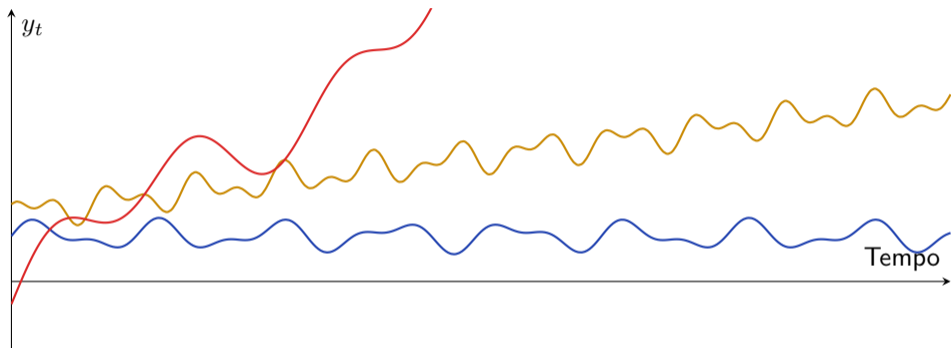
$$\begin{aligned}\text{Cov}(\Delta u_t, \Delta u_{t-1}) &= \text{Cov}(u_t - u_{t-1}, u_{t-1} - u_{t-2}) \\ &= \text{Cov}(u_t, u_{t-1}) - \text{Cov}(u_t, u_{t-2}) - \text{Cov}(u_{t-1}, u_{t-1}) + \text{Cov}(u_{t-1}, u_{t-2}) \\ &= 0 - 0 - \text{Var}(u_{t-1}) + 0 \\ &= -\sigma^2\end{aligned}$$

Conclusão

$$\text{Cov}(\Delta u_t, \Delta u_{t-1}) = -\sigma^2 \neq 0$$

Criamos autocorrelação no lag 1: isso é chamado de **overdifferencing**. O resíduo $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$ segue um processo **MA(1)**.

Visualizando



— Estacionário $I(0)$ — Tendência determinística — Passeio aleatório $I(1)$

Definição

Um **modelo aditivo** para uma série temporal y_t tem a forma

$$y_t = \mu + \gamma t + \delta_t + u_t$$

em que cada componente **soma** (não interage com os outros):

- μ **nível** (constante de partida)
- γt **tendência** linear (cresce γ por período)
- δ_t **componente sazonal** (oscilação cíclica que se repete)
- u_t **erro aleatório**, $u_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$

Quando usar?

Quando a **amplitude da sazonalidade não muda** ao longo do tempo, em valores absolutos.

Modelo Aditivo – Exemplo Numérico

Suponha: vendas mensais de uma loja, $\mu = 100$, $\gamma = 2$, sazonalidade só em dezembro: $\delta_{\text{dez}} = 50$, $\delta_{\text{outros}} = 0$, e $\mathbb{E}(u_t) = 0$.

t (mês)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 (dez)
μ	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
γt	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
δ_t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
$\mathbb{E}(y_t)$	102	104	106	108	110	112	114	116	118	120	122	174

Modelo Multiplicativo

Definição

Um **modelo multiplicativo** tem a forma

$$y_t = \mu \cdot \gamma_t \cdot \delta_t \cdot u_t$$

em que os componentes **interagem entre si** (multiplicam-se).

Quando usar? Quando a **amplitude da sazonalidade cresce com o nível**.

Exemplo

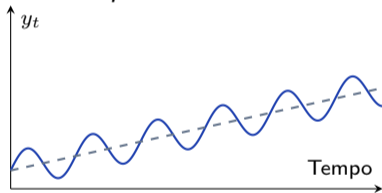
Vendas no varejo (PMC/IBGE): dezembro vende $\sim 30\%$ a mais. Como o varejo cresceu, o pico em valores absolutos também cresceu, mas o **ganho percentual** é o mesmo.

Truque útil: aplicar log vira aditivo:

$$\log y_t = \log \mu + \log \gamma_t + \log \delta_t + \log u_t$$

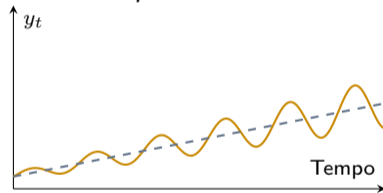
Aditivo vs. Multiplicativo – visualmente

Aditivo
amplitude constante



Picos de tamanho **igual** ao longo do tempo.

Multiplicativo
amplitude cresce



Picos **cada vez maiores**.

Processo *Trend-Stationary* (estacionário em torno da tendência)

Considere o modelo aditivo **sem sazonalidade**:

$$y_t = \mu + \gamma t + u_t, \quad u_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$$

Pergunta: esse processo é estacionário?

Esperança:

$$\mathbb{E}[y_t] = \mu + \gamma t \quad - \text{depende de } t$$

y_t não é estacionário, mas...

A média muda com t , então a primeira condição de estacionariedade é violada. Mas observe: se removermos a tendência γt , o que sobra é

$$y_t - \gamma t = \mu + u_t \quad - \text{isto sim é estacionário!}$$

Por isso chamamos esse processo de **estacionário em torno da tendência** (*trend-stationary*).

Seção 3.2

Notação SARIMA

ARIMA

Vocês já conhecem três peças:

- **AR**(p) – componente autorregressivo (Cap. 1)
- **MA**(q) – componente de médias móveis (Cap. 1)
- **I**(d) – série precisa de d diferenças para ficar estacionária (Cap. 2)

Definição – ARIMA(p, d, q)

Se a série y_t **não é estacionária**, mas fica estacionária após d **diferenças**, ajustamos um **ARMA**(p, q) na série já diferenciada. Isso é um ARIMA(p, d, q).

Por exemplo, um ARIMA(1, 1, 1):

$$\underbrace{\Delta y_t}_{= y_t - y_{t-1}} = c + \phi_1 \Delta y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

A **diferença** da série segue um ARMA(1, 1) – ou seja, exatamente o que vocês já sabem do Cap. 1, mas aplicado em Δy_t em vez de y_t . Para ordens maiores, basta estender com mais termos AR e MA. 14 / 59

ARIMA: casos particulares

- $ARIMA(p, 0, q) = ARMA(p, q)$
- $ARIMA(p, 0, 0) = AR(p)$
- $ARIMA(0, 0, q) = MA(q)$
- $ARIMA(0, 1, 0) = \text{passeio aleatório}$

Exemplo

ARIMA(1, 1, 1) para o IPCA acumulado: o nível de preços é $I(1)$ (precisa de 1 diferença). Depois de diferenciar, ajustamos um $ARMA(1, 1)$ – captura inércia + efeito de choque do mês anterior.

ARIMA – exemplos numéricos de leitura

ARIMA(1, 1, 0)

$$\Delta y_t = c + \phi_1 \Delta y_{t-1} + u_t$$

Em palavras: diferenciei a série 1 vez; o resultado é um AR(1).

Aplicação típica: PIB em log – a **taxa de crescimento** segue um AR(1).

ARIMA(0, 1, 1)

$$\Delta y_t = c + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

Em palavras: diferenciei 1 vez; o resultado é um MA(1).

Aplicação típica: preços de ativos – retornos seguem um MA(1).

Atenção

ARIMA(1, 1, 0) e ARIMA(1, 0, 0) são processos **muito diferentes**. O primeiro é **não estacionário em nível** (passeia, acumula choques, etc.) e o segundo é **estacionário** (volta à média).

De ARIMA para SARIMA

ARIMA captura: **tendência estocástica + autocorrelação serial.**

SARIMA adiciona um elemento importante para muitas séries reais: **sazonalidade.**

Exemplo: vendas no varejo (PMC)

- Tem **tendência** (varejo cresce) → ARIMA
- Tem **inércia mensal** → ARIMA
- Tem **pico todo dezembro** → **ARIMA NÃO modela**

Definição

Um processo ARIMA com componentes **sazonais** é denotado por

$$\text{SARIMA}(p, d, q) (P, D, Q)_m$$

minúsculas (p, d, q)	componentes não sazonais
maiúsculas (P, D, Q)	componentes sazonais
p, P	ordem AR (autorregressiva)
d, D	ordem de integração (quantas diferenças)
q, Q	ordem MA (médias móveis)
m	periodicidade sazonal (12 mensal, 4 trimestral...)

Exemplo

SARIMA(1,0,1)(1,0,1)₁₂: AR(1) e MA(1) não sazonais, AR(1) e MA(1) sazonais com periodicidade 12 (mensal). Sem diferenciação.

SARIMA – como escrever as equações

Vamos abrir um **SARIMA(1,0,1)(1,0,1)₁₂** para ver o que está dentro:

$$y_t = \mu + \underbrace{\phi_1 y_{t-1}}_{\text{AR(1) não saz.}} + \underbrace{\phi_{12} y_{t-12}}_{\text{AR(1) sazonal}} + \underbrace{\theta_1 u_{t-1}}_{\text{MA(1) não saz.}} + \underbrace{\theta_{12} u_{t-12}}_{\text{MA(1) sazonal}} + u_t$$

Lendo a equação:

- $\phi_1 y_{t-1}$: depende do mês anterior (inércia de curto prazo)
- $\phi_{12} y_{t-12}$: depende do **mesmo mês do ano passado** (sazonalidade)
- $\theta_1 u_{t-1}$: choque do mês anterior; $\theta_{12} u_{t-12}$: choque de 12 meses atrás

Periodicidade m : mensais $\Rightarrow m = 12$ | trimestrais $\Rightarrow m = 4$ | semestrais $\Rightarrow m = 2$ |
dia da semana $\Rightarrow m = 7$.

SARIMA – mais exemplos

SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₁₂ – o famoso *Airline Model*, padrão para séries com tendência e sazonalidade fortes:

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-12} - y_{t-13} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \Theta_1 u_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 u_{t-13}$$

Você também pode escrever em termos de operador L (equivalente, porém mais abstrato):

$$\underbrace{(1 - L)(1 - L^{12})}_{\Delta \text{ regular} + \Delta \text{ sazonal}} y_t = \underbrace{(1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^{12})}_{\text{MA}(1) \text{ regular} \times \text{MA}(1) \text{ sazonal}} u_t$$

SARIMA(2,0,0)(0,0,0)₁₂

Equivale a um **AR(2) puro**.

Aplicações brasileiras

Mensal ($m = 12$): IPCA, PMC, consumo de energia.

Trimestral ($m = 4$): PIB, contas nacionais.

Exercícios

Enunciado

Seja Y_t uma série temporal definida por

$$Y_t = tW + X, \quad t = 1, 2, \dots$$

em que $W \sim \mathcal{N}(\mu_W, \sigma_W^2)$ e $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ são **independentes e constantes ao longo do tempo**.

Julgue como V ou F:

- (a) $\mathbb{E}(Y_t) = \mu_W$
- (b) $\text{Var}(Y_t) = t^2 \sigma_W^2$
- (c) Y_t tem distribuição normal
- (d) $\mathbb{E}(Y_t Y_{t+1}) = 1$
- (e) Y_t é uma série estacionária

- (a) F $\mathbb{E}(Y_t) = t\mathbb{E}(W) + \mathbb{E}(X) = t\mu_W + 0 = t\mu_W$, depende de t .
- (b) F Como W e X são independentes,
 $\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(tW) + \text{Var}(X) = t^2 \text{Var}(W) + 1 = t^2\sigma_W^2 + 1 \neq t^2\sigma_W^2$.
- (c) V W e X são normais e independentes; soma de normais independentes é normal.
- (e) F Pelo item (a), $\mathbb{E}(Y_t) = t\mu_W$ depende de t – viola a 1ª condição de estacionariedade.

O item (d) tem mais conta – vai na próxima slide.

Item (d): $\mathbb{E}(Y_t Y_{t+1}) = 1$? **F**

Passo 1 — Expandir o produto $Y_t Y_{t+1}$:

$$\begin{aligned} Y_t Y_{t+1} &= (tW + X)((t+1)W + X) \\ &= t(t+1)W^2 + tWX + (t+1)WX + X^2 \\ &= t(t+1)W^2 + (2t+1)WX + X^2 \end{aligned}$$

Passo 2 — Aplicar a esperança termo a termo:

$$\mathbb{E}(Y_t Y_{t+1}) = t(t+1)\mathbb{E}(W^2) + (2t+1)\mathbb{E}(WX) + \mathbb{E}(X^2)$$

Passo 3 — Usar as hipóteses do enunciado:

- W e X independentes $\Rightarrow \mathbb{E}(WX) = \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(X) = \mu_W \cdot 0 = 0$.
- $\mathbb{E}(W^2) = \text{Var}(W) + [\mathbb{E}(W)]^2 = \sigma_W^2 + \mu_W^2$.
- $\mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 = 1 + 0 = 1$.

Resultado: $\mathbb{E}(Y_t Y_{t+1}) = t(t+1)(\sigma_W^2 + \mu_W^2) + 1 \neq 1$.

Enunciado

Considere $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$, com $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

A afirmação “ Δy_t é estacionário” é V ou F?

Dica: aplique o mesmo procedimento que fizemos antes para $y_t = \mu + \gamma t + u_t$ (lembre dos slides do início do capítulo).

Passo 1 — Calcule $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= (\alpha + \beta t + \varepsilon_t) - (\alpha + \beta(t-1) + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \cancel{\alpha} + \beta t + \varepsilon_t - \cancel{\alpha} - \beta t + \beta - \varepsilon_{t-1} \\ &= \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\end{aligned}$$

Passo 2 — Verifique as 3 condições de estacionariedade:

- $\mathbb{E}(\Delta y_t) = \beta + \mathbb{E}(\varepsilon_t) - \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) = \beta$ (não depende de t) ✓
- $\text{Var}(\Delta y_t) = \text{Var}(\varepsilon_t) + \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$ (não depende de t) ✓
- $\text{Cov}(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = -\sigma^2$ (só depende do lag) ✓

Resposta: V. Δy_t é estacionário – segue um MA(1) com média β .

Mas atenção

Mesmo Δy_t sendo estacionário, diferenciar **não foi a coisa certa**: a série original era *trend-stationary*. O correto seria remover βt por regressão – diferenciar gera *overdifferencing*.

Seção 3.3

Decomposição de Séries Temporais

Decomposição de séries temporais: a ideia

Vimos que, em séries com **tendência determinística**, não devemos diferenciar – temos que tratar a tendência separadamente.

Pergunta: como, na prática, isolamos cada componente do modelo

$$y_t = \mu + \gamma t + \delta_t + u_t ?$$

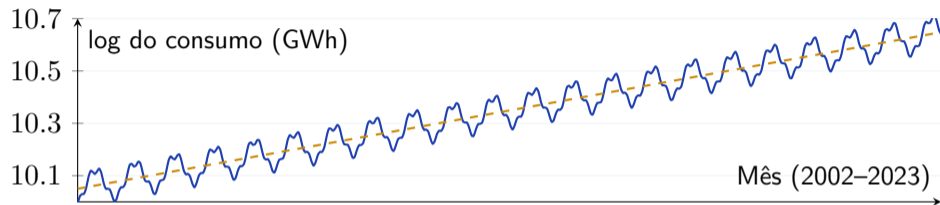
Decomposição

Separar a série em três partes – **tendência**, **sazonalidade** e **aleatório** – de forma que, juntando-as novamente, recuperemos a série original.

Por que é útil?

Para saber se o consumo de energia residencial **realmente** caiu em 2024, é preciso remover a queda **sazonal** de inverno. Sem isso, você confunde o efeito sazonal com uma queda de verdade.

Exemplo: consumo de energia elétrica residencial



O que vemos no gráfico:

- **Linha azul:** série observada
- **Tracejada:** tendência de longo prazo (cresce)
- Ondas regulares ao redor da tendência: sazonalidade anual

Plano: isolar (1) tendência, (2) sazonalidade, (3) componente aleatório.

Passo 1: estimar a tendência por regressão

Criamos uma variável de tempo $t = 1, 2, 3, \dots$ e regredimos y_t contra um polinômio nessa variável:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + v_t$$

Por que polinômio? Uma reta (apenas $\alpha_1 t$) muitas vezes é insuficiente: a série pode acelerar, desacelerar ou ter inflexões. Polinômios de ordem 2, 3 ou 4 capturam melhor.

Procedimento:

1. Estimar $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k$ por MQO (Mínimos Quadrados Ordinários).
2. Calcular a tendência estimada: $\hat{\gamma}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t + \dots + \hat{\alpha}_k t^k$.
3. Obter a série sem tendência: $\tilde{y}_t = y_t - \hat{\gamma}_t$.

Como escolher a ordem k ? Comparar com AIC/BIC, R^2 ajustado e inspeção visual. Polinômios muito altos ($k > 5$) sobreajustam.

Exemplo numérico: regressão da tendência

Suponha que ajustamos um polinômio de **ordem 2** para o log do consumo de energia:

$$\hat{\gamma}_t = 10,03 + 0,0026t - 0,0000007t^2$$

Lendo os coeficientes:

- $\hat{\alpha}_0 = 10,03$: nível inicial (jan/2002, $t = 1$).
- $\hat{\alpha}_1 = 0,0026$: cresce $\sim 0,26\%$ ao mês (a série está em log).
- $\hat{\alpha}_2 = -7 \times 10^{-7}$: leve desaceleração ao longo do tempo.

Calculando para um mês específico, ex. $t = 100$:

$$\hat{\gamma}_{100} = 10,03 + 0,0026 \cdot 100 - 7 \times 10^{-7} \cdot 100^2 = 10,283$$

A série sem tendência no mês 100 é

$$\tilde{y}_{100} = y_{100} - 10,283.$$

Ainda contém a sazonalidade e o componente aleatório.

Passo 2: estimar o componente sazonal

Após removida a tendência, sobra a sazonalidade + componente aleatório. Para isolar a sazonalidade, calculamos a **média de cada mês** ao longo dos anos.

Procedimento (dados mensais, $m = 12$)

1. Para cada mês $j \in \{1, 2, \dots, 12\}$, calcular a **média** dos valores \tilde{y}_t (série sem tendência) que correspondem ao mês j ao longo de todos os anos.
2. O **componente sazonal estimado** $\hat{\delta}_t$ é essa média repetida ao longo da série inteira.

Outras frequências: $m = 12$ (mensal), $m = 4$ (trimestral), $m = 2$ (semestral).

Sazonalidade anual existe?

Sim. Exemplo: **gastos do governo federal** aumentam a cada 4 anos por causa do calendário eleitoral \rightarrow ciclo $m = 4$ para dados anuais.

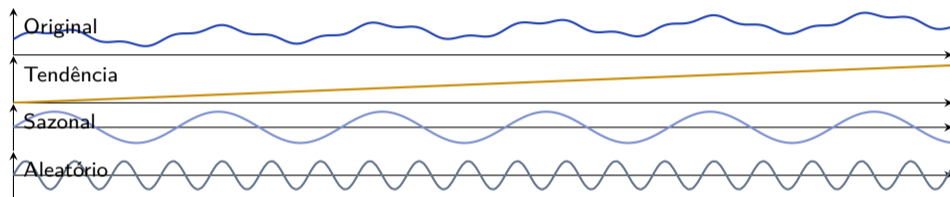
Exemplo numérico: estimando a sazonalidade

Vendas do varejo (índice base 100), série sem tendência, 3 anos:

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Ano 1	-8	-5	0	-2	1	-3	0	2	3	5	8	25
Ano 2	-10	-4	1	-1	0	-2	1	1	4	6	9	23
Ano 3	-9	-6	-1	-3	2	-4	-1	3	2	4	7	27
$\hat{\delta}_j$	-9	-5	0	-2	1	-3	0	2	3	5	8	25

Lendo a tabela: a linha $\hat{\delta}_j$ é o componente sazonal estimado. **Dezembro:** +25 (efeito Natal). **Janeiro:** -9 (pós-festas). Esses 12 valores são repetidos ao longo da série para formar $\hat{\delta}_t$.

Decomposição completa: visualizando



A série **original** (azul) é a soma dos três componentes abaixo: tendência + sazonal + aleatório.

Decomposição automática

Na prática, fazemos a decomposição com **funções prontas**:

- **R** (pacote forecast): `decompose(y, type = "additive")`
- **Python** (statsmodels): `seasonal_decompose(y, model='additive')`

Ambas devolvem três séries: `trend`, `seasonal`, `random`.

Como a função estima a tendência?

Por **média móvel centrada**, em vez de regressão polinomial. Para dados mensais ($m = 12$):

$$\hat{y}_t = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} y_{t-6} + y_{t-5} + \dots + y_{t+5} + \frac{1}{2} y_{t+6} \right)$$

Suaviza tomando a média dos 12 meses ao redor de t . Perdem-se as caudas (primeiros e últimos 6 meses).

Aditivo ou multiplicativo? Como decidir

Use aditivo se...

A amplitude da sazonalidade é **constante** ao longo do tempo (em valores absolutos).

Ex.: temperatura média mensal de Salvador.

Use multiplicativo se...

A amplitude da sazonalidade **crece com o nível** da série.

Ex.: vendas no varejo – pico de Natal cresce.

Dica prática: se você tomou $\log y_t$ antes, o modelo aditivo equivale a um multiplicativo na escala original. Em macro, é comum usar $\log y_t$ + decomposição aditiva.

Outros métodos

X-13-ARIMA-SEATS: padrão da indústria (Census Bureau, IBGE, BCB). Lida com feriados móveis (Carnaval, Páscoa). R: pacote `seasonal`; Python: `statsmodels.tsa.x13`.

Exercícios

Enunciado

Uma série mensal do preço do produto agrícola Y , de jan/1995 a dez/1997, apresentou tendência linear estimada

$$\hat{Y}_X = 3 + 0,25 X$$

em que X é o índice do mês ($X = 1$ para jan/1995, $X = 2$ para fev/1995, ...).

As variações sazonais (modelo aditivo) para os primeiros meses foram:

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
Variação sazonal	-1,25	-0,52	0,84	1,50	3,00	3,85

Estime o preço de Y para janeiro de 1998.

Passo 1 — Identificar X para janeiro de 1998.

A série começa em jan/1995 ($X = 1$). Janeiro de 1998 está **36 meses depois**:
 $X = 37$.

Passo 2 — Calcular a tendência estimada em $X = 37$:

$$\hat{\gamma}_{37} = 3 + 0,25 \cdot 37 = 3 + 9,25 = 12,25$$

Passo 3 — Somar o componente sazonal de janeiro:

$$\hat{Y}_{\text{jan}/98} = \hat{\gamma}_{37} + \hat{\delta}_{\text{jan}} = 12,25 + (-1,25) = \boxed{11,00}$$

No modelo aditivo, a previsão é **tendência + sazonalidade do mês**. O componente sazonal de janeiro **repete** todo ano – se fosse fevereiro de 1999, usaríamos $\hat{\delta}_{\text{fev}} = -0,52$.

Enunciado

Uma série temporal pode apresentar componente de tendência, *outliers*, padrões sazonais, quebras estruturais etc. Qual alternativa é **correta**?

- (a) A existência de sazonalidade implica recomendação de procedimentos como X-11 e *dummies* sazonais, que contemplam a sazonalidade **estocástica**.
- (b) A existência de sazonalidade leva à rejeição da hipótese de normalidade dos erros, implicando resíduos ruído branco.
- (c) A exclusão de *outliers* pode **aumentar** a dependência temporal das observações.
- (d) A inspeção visual é fundamental para observar *outliers* e proceder a sua **exclusão**.
- (e) A forma mais simples de extrair a sazonalidade de uma série, quando se assume **determinística**, é via **variáveis dummies**.

Resposta correta: (e)

- (a) F Inversão de conceitos: *dummies* sazonais e X-11 tratam sazonalidade **determinística** (padrão fixo), não estocástica.
- (b) F Sazonalidade não causa não-normalidade, e “ruído branco” contradiz “rejeitar normalidade”.
- (c) F Excluir *outliers* tende a **reduzir** o ruído, não a aumentar a dependência temporal.
- (d) F Visualizar *outliers* é fundamental, mas excluir indiscriminadamente é **má prática** – *outliers* podem refletir eventos reais (apagão de 2001, pandemia 2020).
- (e) V Quando a sazonalidade tem padrão fixo (determinística), basta criar *dummies* (uma para cada mês menos uma) e incluir na regressão.

Seção 3.4

Filtragem

Filtragem: separando ciclo de tendência

Em séries de **frequência anual** – como o PIB anual – não faz sentido falar em sazonalidade. Mas ainda queremos separar a série em **tendência (longo prazo)** e **ciclo (curto prazo)**.

Por que isso interessa?

- **Tendência** (PIB potencial): o nível “natural” da economia, dada sua capacidade produtiva.
- **Ciclo** (hiato do PIB): desvios temporários acima ou abaixo do potencial – recessões e expansões.

Aplicação

Política monetária: o Banco Central do Brasil (BCB) precisa saber se a economia está aquecida (PIB acima do potencial) ou em recessão (PIB abaixo do potencial) para decidir o nível da Selic. Isso exige separar tendência e ciclo.

A ferramenta padrão é o **filtro de Hodrick-Prescott (HP)**, criado em 1997.

Filtro de Hodrick-Prescott (HP): a ideia

Temos a série observada y_1, y_2, \dots, y_T (o PIB de cada ano). Queremos extrair dela uma **tendência** $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_T$ – *um valor de tendência para cada período* – e definir o ciclo como o que sobra: $c_t = y_t - \gamma_t$.

O que são os γ_t ?

São os **parâmetros que vamos estimar**: γ_t é o **valor da tendência no instante t** . Não é um único coeficiente como em uma regressão linear – são T números, um para cada data. Juntos, eles formam a **linha suave** que passa pelo meio da série.

A tendência deve ao mesmo tempo:

- **seguir os dados** (senão não é a tendência *daquela* série),
- ser **suave** (senão não é uma tendência, é a própria série).

Hodrick & Prescott (1997) propuseram resolver esse dilema com **um problema de minimização**.

Filtro HP: o problema de minimização

O filtro escolhe a sequência $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_T$ que minimiza

$$\underbrace{\sum_{t=1}^T (y_t - \gamma_t)^2}_{\text{(A) ajuste aos dados}} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{t=2}^{T-1} [(\gamma_{t+1} - \gamma_t) - (\gamma_t - \gamma_{t-1})]^2}_{\text{(B) suavidade da tendência}}$$

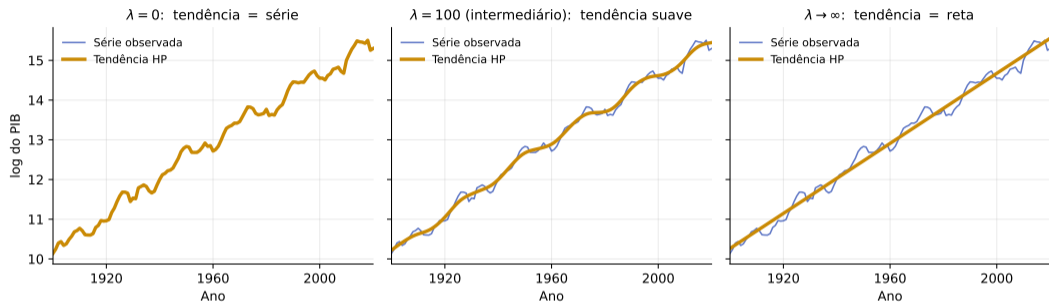
Termo (A) – ajuste. Soma dos quadrados das distâncias entre tendência e série. Queremos γ_t perto de y_t .

Termo (B) – suavidade. Note que:

$$(\gamma_{t+1} - \gamma_t) - (\gamma_t - \gamma_{t-1}) = \underbrace{(\gamma_{t+1} - \gamma_t)}_{\text{taxa de cresc. nova}} - \underbrace{(\gamma_t - \gamma_{t-1})}_{\text{taxa de cresc. antiga}}$$

É a **mudança da inclinação** da tendência – a sua *segunda diferença*. Penalizar isso significa: *tudo bem a tendência crescer, desde que a taxa de crescimento mude pouco entre um período e o seguinte*. λ é o **preço da rugosidade**: quanto custa, em unidades do ajuste (A), permitir uma mudança brusca na inclinação (B).

Filtro HP: o papel de λ (três casos)



- $\lambda = 0$: ignora-se a suavidade. A solução ótima é $\gamma_t = y_t$ – a **tendência colada na série**. Não filtra nada.
- $\lambda \rightarrow \infty$: ignora-se o ajuste. A segunda diferença é forçada a zero \Rightarrow inclinação constante \Rightarrow **tendência = reta** (regressão linear no tempo).
- λ **intermediário**: *é onde a gente quer estar*. A tendência é **suave mas não linear**: dobra suavemente, acompanha mudanças estruturais (reformas, crises duradouras), e ignora oscilações de curto prazo.

Filtro HP: valores convencionais de λ

Valores recomendados (Hodrick & Prescott, 1997):

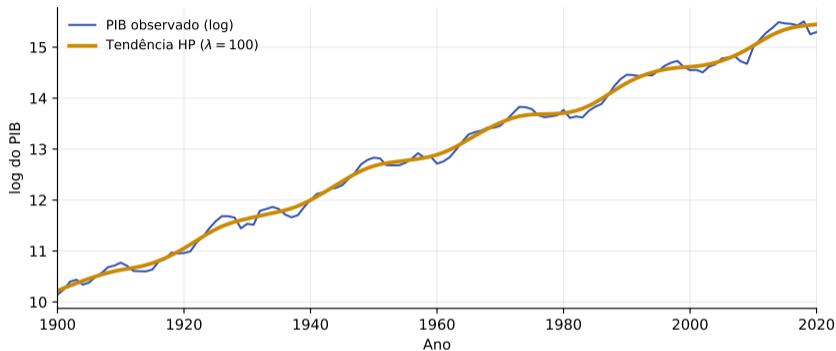
Frequência	λ	Justificativa
Anual	6,25 (ou 100)	Poucas observações por ciclo
Trimestral	1.600	Padrão para PIB trimestral
Mensal	129.600	Muitas observações por ciclo

Por que valores tão diferentes? A penalização opera **por período**: em séries mensais há mais oportunidades de mudança que em anuais $\Rightarrow \lambda$ precisa ser bem maior para a mesma suavização.

De onde vem o “1.600”? (Wahba, 1980)

Se o ciclo e a segunda diferença da tendência forem ruídos brancos independentes com variâncias σ_c^2 e σ_{tr}^2 , a escolha ótima é $\lambda^* = \sigma_c^2 / \sigma_{tr}^2$. Usar $\lambda = 1600$ equivale a supor desvio-padrão do ciclo $\sqrt{1600} = 40$ vezes o das inovações da tendência. Kydland & Prescott (1990): “*approximate the curva that students of business cycles would draw through a time plot...*”.

Filtro HP no PIB (ilustração)



Lendo o gráfico: linha azul = série observada (com ciclos, choques: grande depressão, década perdida, 2008, pandemia); linha dourada = tendência HP com $\lambda = 100$ (anual). É **suave mas curva** – captura mudanças estruturais sem perseguir cada oscilação.

Hiato do PIB: $\text{hiato}_t = y_t - \hat{y}_t^{HP}$ (> 0 : economia aquecida; < 0 : recessão).

Filtro HP: limitações

O filtro HP é muito utilizado em macroeconomia, mas tem problemas conhecidos.

Críticas principais (Hamilton, 2018)

1. **Instabilidade nas pontas:** a tendência no início e no final da amostra é instável. Quando novos dados chegam, a tendência **passada** pode mudar.
2. **Ciclos espúrios:** pode criar ciclos que não existem nos dados.
3. λ é **arbitrário:** as escolhas convencionais não têm justificativa estatística forte.

Alternativas (não veremos em detalhe):

- Filtro de **Baxter-King (1995)** – filtro de banda.
- Filtro de **Christiano-Fitzgerald (2003)** – similar ao BK.
- **Hamilton (2018)** – regressão simples como alternativa ao HP.

Recomendação: usar HP, mas sempre verificar a robustez a outras especificações.

Seção 3.5

Suavização

Suavização: médias móveis

Outra forma de tratar uma série – especialmente para **remover ruído** – é a **suavização**.

Médias móveis (*moving average*)

A versão mais comum substitui cada y_t pela **média dos seus vizinhos**. Por exemplo, média móvel de 3 pontos:

$$y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

Generalizando para $2n + 1$ pontos: $y_t^* = \frac{y_{t-n} + \dots + y_t + \dots + y_{t+n}}{2n + 1}$.

Outros métodos: medianas móveis (mais robusta a *outliers*), **Lowess** (regressão local).

Médias móveis: exemplo numérico

Série: $y_t = \{10, 12, 11, 13, 14, 12, 15, 16\}$ (8 observações)

Aplicar média móvel de 3 pontos:

$$y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}, \quad t = 2, 3, \dots, 7$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	10	12	11	13	14	12	15	16
y_t^*	-	11,0	12,0	12,7	13,0	13,7	14,3	-

Exemplo de cálculo: $y_4^* = \frac{y_3 + y_4 + y_5}{3} = \frac{11 + 13 + 14}{3} = 12,67.$

Note que **perdemos as pontas** ($t = 1$ e $t = 8$): não há vizinhos suficientes para calcular a média.

Exercícios

Enunciado

Considere a seguinte série temporal:

$$\{130, 140, 135, 145, 141, 148, 144, X\}$$

Aplicando o método de previsão de **médias móveis de 2 pontos**, o valor para a projeção do oitavo item (X) será:

- (a) 148 (b) 146 (c) 122 (d) 138 (e) 141

*Dica: a média móvel de 2 pontos para previsão usa as **duas últimas observações**.*

Resposta correta: (b) 146

Passo 1 — Identificar as duas últimas observações:

A 8ª observação (X) é a próxima a ser prevista. As duas anteriores são $y_6 = 148$ e $y_7 = 144$.

Passo 2 — Calcular a média:

$$\hat{X} = \frac{y_6 + y_7}{2} = \frac{148 + 144}{2} = \boxed{146}$$

Suavização \neq médias móveis para previsão:

- **Suavização** (seção 3.5): usa vizinhos **antes e depois** de t .
- **Previsão** (este exercício): só os pontos **passados**.

Veremos previsão com mais detalhes no Cap. 5.

Enunciado

Analise as afirmativas:

I. A tendência indica o comportamento de **longo prazo**, isto é, se a série cresce, decresce ou permanece estável, e qual a velocidade dessas mudanças. Trabalha-se com tendência **constante**, **linear** ou **quadrática**.

II. A sazonalidade corresponde às oscilações que ocorrem em período do ano, mês, semana ou dia. A diferença entre os componentes **sazonal** e **cíclico** é que o **sazonal possui movimentos de difícil previsão**, ocorrendo em **intervalos irregulares**, enquanto os **movimentos cíclicos tendem a ser regulares**.

Quais estão corretas?

Resposta: apenas **I** está correta.

- (I) **Correta.** Tendência é o comportamento de longo prazo. Pode ser constante (nível), linear, quadrática ou polinômio de ordem superior.
- (II) **Incorreta – conceitos invertidos!**

Sazonal vs. cíclico

Sazonal oscilações **regulares** em intervalo **fixo** (ano, mês, semana)

Ex.: vendas em dezembro, energia no verão

Cíclico oscilações **irregulares**, sem periodicidade fixa

Ex.: ciclos econômicos (recessões ~ a cada 7-10 anos, mas variável)

Mnemônico: Sazonal = Sempre na mesma época. Cíclico = Coincide com a economia, mas variável.

Conceitos cobertos

- Tendência **determinística** (vs. estocástica do Cap. 2)
- Modelos **aditivo** e **multiplicativo**
- Processo *trend-stationary*
- ARIMA e **SARIMA** $(p, d, q)(P, D, Q)_m$
- Decomposição manual (regressão + médias por mês)
- Decomposição automática (decompose, X-13)
- Filtro HP: PIB potencial e hiato
- Suavização: médias móveis

Próximos capítulos

- Cap. 4: Metodologia de Box-Jenkins
- Cap. 5: Previsão

Takeaway: sempre verificar se há tendência – e que tipo. **Determinística** → regressão/decomposição. **Estocástica** → diferenciação. Confundir os dois gera resultados errados.

Dúvidas?

Próxima aula: Metodologia de Box-Jenkins