Capítulo 2

Processos Não Estacionários

Econometria II · UFBA

Prof. Pablo Castro

Roteiro

Parte I

- Processos estacionários
- **Processos não estacionários**
- Processos com tendência determinística

Parte II

- Metodologia de Box-Jenkins
- Previsão
- Cointegração
- Autoregressão vetorial

Seção 2.1

Processos Não Estacionários e Processos Integrados

O que estudamos neste capítulo?

Objetivo:

Revisão de processos não estacionários, compreender o conceito de raiz unitária e aprender os testes para detectá-la.

Roteiro

1. Motivação: regressão espúria e choques permanentes
2. Passeio aleatório (*random walk*)
3. Processos integrados I(d)
4. Teste Dickey-Fuller (DF)
5. Exercícios

Onde estamos?

- ✓ Introdução ao MQO
- ✓ Regressão e inferência
- ✓ Processos estacionários
- → **Raiz unitária / I(d)**
- Testes DF e ADF
- Box-Jenkins
- Cointegração / VAR

Séries Estacionárias vs. Não Estacionárias

Série estacionária

Oscila em torno de uma **média fixa**.
Choques têm efeito **temporário**.

A variância não cresce com o tempo.
O passado distante não importa.

Exemplo

Taxa de inflação (IPCA mensal): sobe, desce, mas gravita em torno de uma média histórica.

Série não estacionária

Sem média fixa para onde retornar.
Choques têm efeito **permanente**.

A variância **cresce** com o tempo.
O passado inteiro se acumula no presente.

Exemplo

Nível de preços (IPCA acumulado): nunca "volta" a um patamar anterior — cada choque desloca o índice para sempre.

Séries Estacionárias vs. Não Estacionárias

Consequência

Se a série for não estacionária e isso não for tratado, os modelos produzirão **inferências inválidas** e **previsões enganosas**. Verificar a estacionariedade é o **primeiro passo** de qualquer análise de séries temporais.

Processos Integrados: I(d)

Definição

Dizemos que $\{y_t\}$ é **integrado de ordem** d, $y_t \sim I(d)$, se são necessárias d **diferenciações** para torná-lo estacionário:

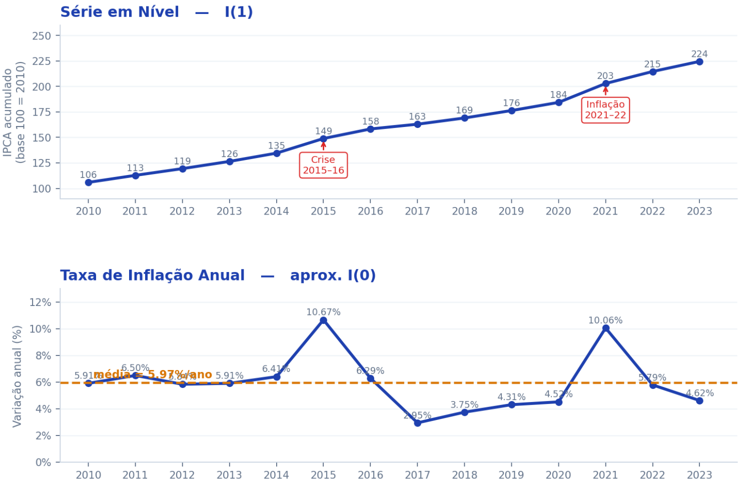
$$\Delta^d y_t \sim I(0)$$

A notação $I(d)$ indica quantas vezes a série precisa ser **diferenciada** para se tornar estacionária.

- **I(0)** — já estacionário.
- **I(1)** — uma diferença torna a série estacionária: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \sim I(0)$
- **I(2)** — duas diferenças são necessárias:

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_t - y_{t-1}) = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) \sim I(0)$$

Exemplo: IPCA



Fonte: IBGE/SIDRA — Série 1737 (IPCA). 2010–2023.

O que é

Quando duas séries $I(1)$ **não relacionadas** são regredidas uma na outra, frequentemente obtemos R^2 alto e t-estatísticas significativas — sem nenhuma relação causal real.

Por que acontece?

- Séries $I(1)$ acumulam choques permanentes
- Duas séries com tendência estocástica "andam juntas" por coincidência
- A inferência via t de Student **não é válida** para séries $I(1)$

Solução: verificar se as séries são $I(1)$ **antes** de estimar qualquer regressão, usando os testes que veremos a seguir.

Regressão Espúria

Problema

Quando duas séries $I(1)$ **não relacionadas** são regredidas uma na outra, frequentemente obtemos R^2 alto e t-estatísticas significativas — sem nenhuma relação causal real.

Por que acontece?

- Séries $I(1)$ acumulam choques permanentes ao longo do tempo
- Duas séries com tendência estocástica "andam juntas" por coincidência
- A inferência via t de Student **não é válida** para séries não estacionárias
- Durbin-Watson ≈ 0 é um sinal de alerta clássico

Exemplo

PIB e **Ibovespa**: ambas as séries crescem ao longo do tempo. Uma regressão do PIB no índice em *nível* produz $R^2 \approx 0{,}9$ e coeficientes altamente significativos — mesmo sem relação causal direta entre os dois.

Dois Tipos de Tendência

Séries com tendência podem ser de dois tipos muito diferentes:

Tipo 1: Tendência Determinística

$$y_t = \mu + \beta\, t + u_t, \quad u_t \sim I(0)$$

A série é *estacionária em torno de uma tendência*.

Choque: efeito **temporário** — a série retorna à tendência.

Tratamento: remover βt por regressão; **não diferenciar**.

Tipo 2: Tendência Estocástica – $I(1)$

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

A série é *estacionária em primeira diferença*.

Choque: efeito **permanente** — a série não retorna.

Tratamento: tomar Δy_t; **não regredir tendência**.

Regressão Espúria:

A solução depende do tipo de não-estacionariedade: tendência **estocástica** $\rightarrow$ diferenciar; tendência **determinística** $\rightarrow$ remover a tendência.

Choques Temporários vs. Permanentes

Processo estacionário: I(0)

Choque tem efeito **temporário**.

$$y_t = \phi\, y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi| < 1$$

A série retorna à média após o choque.
Função impulso-resposta decai a zero.

Exemplo

Taxa Selic: um choque de política monetária eleva a taxa por alguns trimestres, mas ela converge de volta à taxa neutra de longo prazo.

Processo não estacionário: I(1)

Choque tem efeito **permanente**.

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Não há retorno a nenhuma média fixa.
Função impulso-resposta **não decai**.

Exemplo

Nível de preços (IPCA acumulado): o choque inflacionário de 2021–22 elevou o nível de preços permanentemente. Ele não "volta" ao patamar anterior.

Seção 2.2

Passeio Aleatório

Passeio Aleatório

Definição

O **passeio aleatório** (*random walk*) é o AR(1) com $\phi_1 = 1$:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2), \quad \text{com } y_0 \text{ fixo}$$

Por que os choques se acumulam? Substituindo recursivamente:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \varepsilon_1 \\ y_2 &= y_1 + \varepsilon_2 = y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ y_3 &= y_2 + \varepsilon_3 = y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\boxed{y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i}$$

Cada choque ε_i é incorporado **permanentemente** — nenhum é amortecido ou esquecido.

Passeio Aleatório: Propriedades

Propriedades

$$\mathbb{E}[y_t] = y_0$$

$$\mathrm{Var}(y_t) = t\,\sigma^2 \quad \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

$$\mathrm{Cov}(y_t,\, y_{t+s}) = t\,\sigma^2, \quad s > 0$$

Intuição de $\mathrm{Var} = t\sigma^2$: y_t é a soma de t choques independentes, cada um com variância σ^2. Quanto mais períodos, mais incerteza acumulada.

Intuição de $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t+s}) = t\sigma^2$: y_t e y_{t+s} compartilham os mesmos t primeiros choques; os s adicionais são independentes de y_t.

Exemplo

Taxa de câmbio R$/US$: absorve choques permanentes a cada período. O melhor preditor da taxa de amanhã é a taxa de hoje.

Comparação com AR(1) estacionário

No AR(1) com $|\phi| < 1$, cada choque é amortecido pelo fator $\phi^k \to 0$.

No passeio aleatório ($\phi = 1$), o fator de amortecimento é $1^k = 1$ — o choque nunca decai.

Passeio Aleatório: Violação da Estacionariedade

Três condições e o passeio aleatório

Condição	Exige	Passeio aleatório	
1. Média	$\mathbb{E}[y_t] = \mu$ constante	$\mathbb{E}[y_t] = y_0$	$\checkmark^*$
2. Variância	$\mathrm{Var}(y_t) < \infty$	$t\sigma^2 \to \infty$	**viola**
3. Covariância	Cov só de k	$t\sigma^2$: depende de t	

*Para o passeio aleatório *puro* a média é constante em y_0, mas as condições 2 e 3 são violadas.

Intuição

A série "anda" sem amarras: cada choque é absorvido **permanentemente**, fazendo a variância crescer sem limite.

Quanto maior t, mais incerta é a posição de y_t — mesmo que a média formal seja y_0.

Passeio Aleatório com Drift

Definição

$$y_t = c + y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \text{com } y_0 \text{ fixo}$$

Iteração: Substituindo recursivamente:

$$y_1 = c + y_0 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = c + y_1 + \varepsilon_2 = 2c + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = c + y_2 + \varepsilon_3 = 3c + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$
$$\vdots$$
$$\boxed{y_t = y_0 + ct + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i}$$

O c aparece **uma vez por período** — após t períodos acumula ct.

Passeio Aleatório com Drift: Propriedades

Propriedades

$$\mathbb{E}[y_t] = y_0 + ct \quad \longrightarrow \text{ cresce com } t$$

$$\mathrm{Var}(y_t) = t\,\sigma^2$$

A série combina **tendência determinística** (ct) com **tendência estocástica** $(\sum \varepsilon_i)$.

Com $c \neq 0$, as **três condições** de estacionariedade são violadas.

Ao diferenciar: $\Delta y_t = c + \varepsilon_t$ — **estacionário**.

Exemplo

PIB real brasileiro: cresce de forma persistente $(c > 0)$, mas com desvios cumulativos aleatórios em torno da tendência.

Crises como 2015–16 e 2020 deixam "cicatrizes" permanentes no nível do PIB — o produto não recupera o patamar anterior.

Takeaway
c é o drift: desloca a série para cima a cada período.
$\sum \varepsilon_i$ é a tendência estocástica: acumula choques permanentemente.

Seção 2.3

Teste de Dickey-Fuller

Hipóteses e Reformulação do Teste DF

Ponto de partida: $y_t = \phi_1 \, y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Hipóteses

$$H_0\colon \phi_1 = 1 \quad \text{(raiz unitária)} \qquad H_1\colon |\phi_1| < 1 \quad \text{(estacionário)}$$

Reformulação — subtraindo y_{t-1} de ambos os lados:

$$\underbrace{y_t - y_{t-1}}_{\Delta y_t} = (\phi_1 - 1)\, y_{t-1} + \varepsilon_t \implies \boxed{\Delta y_t = \delta \, y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \delta = \phi_1 - 1}$$

Hipóteses equivalentes

$$H_0\colon \delta = 0 \qquad H_1\colon \delta < 0$$

Teste **unicaudal à esquerda**: rejeitamos H_0 quando $\hat{\delta}$ é suficientemente negativo.

Três Especificações do Teste DF

Equações estimadas

Caso	**Equação**	**Quando usar**
1. Sem constante	$\Delta y_t = \delta\, y_{t-1} + \varepsilon_t$	Série em torno de zero
2. Com constante	$\Delta y_t = c + \delta\, y_{t-1} + \varepsilon_t$	Série com média não-nula
3. Com tendência	$\Delta y_t = c + \beta t + \delta\, y_{t-1} + \varepsilon_t$	Série com tendência visível

Como escolher?

- Olhe o gráfico da série antes de testar
- Tendência visível $\rightarrow$ inclua tendência (caso 3)
- Oscila em torno de nível não-nulo $\rightarrow$ caso 2
- Cada caso tem **seus próprios valores críticos**

Referência de valores críticos (caso 2, $T = 100$)

Nível 1%	$-3{,}51$
Nível 5%	$-2{,}89$
Nível 10%	$-2{,}58$

Distribuição da Estatística DF e Regra de Decisão

Distribuição não padrão

A estatística $\tau = \hat{\delta}/\mathrm{ep}(\hat{\delta})$ sob H_0 **não** segue a distribuição t de Student. Ela segue a **distribuição Dickey-Fuller**, com caudas mais espessas à esquerda e valores críticos mais negativos.

Regra de decisão

Resultado	Conclusão
$\tau < VC_{DF}$	Rejeita H_0: série **estacionária**
$\tau \geq VC_{DF}$	Não rejeita H_0: **raiz unitária**

VC_{DF} é **negativo**: só rejeitamos se a estatística for suficientemente negativa.

Seção 2.4

Exercícios

Enunciado

Seja o processo auto-regressivo: $y_t = \phi\, y_{t-1} + \varepsilon_t$. Julgue as afirmativas como **Verdadeiro (V)** ou **Falso (F)**:

(a) O processo é estacionário para $\phi < 1$.

(b) Se $\phi = 1$, o processo é dito um caminho aleatório (*random walk*).

(c) O estimador de mínimos quadrados ordinários do parâmetro ϕ é não tendencioso.

(d) A estatística t de Student pode ser usada para testar a presença de raiz unitária.

(e) O processo pode ser escrito na forma alternativa $\Delta y_t = \delta\, y_{t-1} + \varepsilon_t$, em que $\delta = \phi - 1$ e $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$.

(a) F A condição correta é $|\phi| < 1$. Se $\phi = -1{,}2$, por exemplo, temos $\phi < 1$ mas o processo *não* é estacionário.

(b) V $\phi = 1 \Rightarrow y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$: definição do passeio aleatório.

(c) F O estimador MQO de ϕ é **tendencioso** quando $\phi \approx 1$. Sob H_0: raiz unitária, sua distribuição não é centrada em ϕ.

(d) F Sob H_0, a estatística t **não** segue a distribuição t de Student. Deve-se usar os valores críticos de Dickey-Fuller.

(e) V $y_t - y_{t-1} = (\phi - 1)\, y_{t-1} + \varepsilon_t = \delta\, y_{t-1} + \varepsilon_t$, com $\delta = \phi - 1$. Essa é a forma usada no teste DF para detectar raiz unitária.

Reformulação DF

$$y_t = \phi\, y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Downarrow \; (-y_{t-1})$$

$$\Delta y_t = \delta\, y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\delta = \phi - 1$$

$$H_0 : \delta = 0$$

$$H_1 : \delta < 0$$

Enunciado

Julgue as afirmativas como **Verdadeiro (V)** ou **Falso (F)**:

(a) Toda série temporal estacionária com variância finita pode ser escrita como um modelo de média móvel com termo de erro serialmente não correlacionado.

(b) Um modelo de séries temporais não estacionário tem pelo menos uma raiz unitária.

(c) O teste de Dickey-Fuller é monocaudal.

(d) Um modelo AR(2) dado por $Y_t = a + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ será estacionário se $\phi_1 < 1$ e $\phi_2 < 1$.

(e) Um passeio aleatório é um processo estacionário.

(a) V Teorema de Wold: qualquer processo $I(0)$ com variância finita admite representação MA(∞) com inovações não correlacionadas.

(b) V Não-estacionariedade do tipo raiz unitária implica que o polinômio AR tem pelo menos uma raiz no círculo unitário.

(c) V $H_1 : \delta < 0$: a rejeição ocorre apenas à **esquerda**. O teste é unicaudal.

(d) F Para AR(2), a condição correta exige que as raízes de $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$ estejam fora do círculo unitário, o que impõe três desigualdades simultâneas.

(e) F $\mathrm{Var}(y_t) = t\sigma^2 \to \infty$: variância cresce com t, violando a segunda condição de estacionariedade.

AR(2): condições de estacionariedade

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$
$$|\phi_2| < 1$$

Apenas $\phi_1 < 1$ e $\phi_2 < 1$ **não são suficientes**.

Enunciado

Considere o seguinte processo: $Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$, $t = 1, 2, \ldots$, em que $Y_0 = 2$ e $u_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Julgue as afirmativas como **Verdadeiro (V)** ou **Falso (F)**:

(a) $\mathbb{E}(Y_t) = 2$

(b) Y_t é um processo não-estacionário.

(c) Se $\delta = 0$, Y_t é um processo estacionário.

(d) $\mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma^2$

(e) Definindo $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$, o processo ΔY_t é estacionário.

(a) F Por iteração: $Y_t = Y_0 + t\delta + \sum_{i=1}^{t} u_i$.
Logo $\mathbb{E}(Y_t) = 2 + t\delta$, que **depende de** t se $\delta \neq 0$.

(b) V $\mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma^2$ cresce com t: segunda condição de estacionariedade violada.

(c) F Mesmo com $\delta = 0$: $\mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma^2 \to \infty$. A variância cresce — o processo **ainda** é não estacionário.

(d) V $Y_t = Y_0 + t\delta + \sum_{i=1}^{t} u_i \;\Rightarrow\; \mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma^2$. $\checkmark$

(e) V $\Delta Y_t = \delta + u_t$: constante mais ruído branco $\Rightarrow$ processo estacionário.

Passeio aleatório com drift

$$Y_t = \underbrace{Y_0 + \delta t}_{\text{tend. det.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{t} u_i}_{\text{tend. estoc.}}$$

$$\mathbb{E}(Y_t) = 2 + \delta t$$

$$\mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma^2$$

$$\Delta Y_t = \delta + u_t \;\sim I(0)$$

Resumo

Conceitos revisados

- Regressão espúria e inferência inválida
- Choques permanentes (I(1)) vs. temporários (I(0))
- Passeio aleatório: $\mathrm{Var}(y_t) = t\sigma^2$
- Passeio aleatório com drift: $\mathbb{E}(y_t) = y_0 + ct$
- Processos I(d): d diferenciações para I(0)
- Teste DF: reformulação, 3 especificações
- Distribuição não padrão da estatística τ

Para a próxima aula

- Tendência determinística (*trend-stationary*)
- Distinguir I(1) de tendência determinística
- Modelos SARIMA
- Sazonalidade estocástica e determinística

Takeaway:
Num processo $I(1)$, choques são **permanentes**. Diferenciar remove a tendência estocástica — mas **não deve ser feito** se a tendência for determinística.

Dúvidas?

Próxima aula: Tendência Determinística e SARIMA