Séries Temporais

Econometria II · UFBA

Prof. Pablo Castro

Referência: Notas de Aula

Roteiro

Parte I

- **Processos estacionários**
- Processos não estacionários
- Processos com tendência deterministica

Parte II

- Metodologia de Box-Jenkins
- Previsão
- Cointegração
- Autoregressão vetorial

Introdução

Processo estocástico vs. série temporal

Definição

Um processo estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias $\{y_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ cujos valores são governados pelas leis da probabilidade.

Processo estocástico
O mecanismo gerador de dados: todas as realizações possíveis.

Nunca observado diretamente.

Série temporal
Uma única realização desse processo: os dados que de fato coletamos.

O que aparece na planilha / banco de dados.

Exemplo

O IPCA de janeiro/2024 (0,42%) é **uma** realização do processo estocástico "inflação brasileira". Poderíamos ter observado um valor diferente se o choque do petróleo em dezembro/2023 tivesse sido outro.

Capítulo 1

Processos Estacionários

Econometria II · UFBA

Prof. Pablo Castro

O que estudamos neste capítulo?

Objetivo:

Revisar os conceitos fundamentais do Capítulo 1 antes de avançarmos para processos não-estacionários, testes de raiz unitária e ARIMA.

Roteiro

1. Estacionariedade fraca e ruído branco
2. Processos AR(1) e AR(p)
3. Processos MA(q) e ARMA(p,q)
4. ACF e PACF: como ler os gráficos
5. Exercícios

Onde estamos?

- ✓ Introdução ao MQO
- ✓ Regressão e inferência
- → **Séries temporais**
  - Processos estacionários
  - Raiz unitária / ARIMA
  - Box-Jenkins
  - Cointegração / VAR

Estacionariedade Fraca

Definição 1 – Processo fracamente estacionário

O processo $\{y_t\}$ é fracamente estacionário (ou estacionário de segunda ordem) se:

1. $\mathbb{E}[y_t] = \mu < \infty$, para todo t
2. $\mathrm{Var}(y_t) = \gamma_0 < \infty$, para todo t
3. $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k,$ depende *apenas* de k, não de t

Estacionário – exemplos

Taxa de inflação (IPCA): oscila em torno de uma média, sem tendência sistemática de crescimento.

Retorno de ações (log-retorno): media próxima de zero, variância relativamente estável.

Não-estacionário – exemplos

Nível do PIB: cresce ao longo do tempo – a média muda.

Preço de ações: apresenta tendência e variância crescente.

Taxa de câmbio nominal: persistente, com choques permanentes.

Ruído Branco

Definição 2 – Ruído Branco

O processo $\{\varepsilon_t\}$ é um ruído branco se:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \;\; \forall\, k \neq 0$$

Quando $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$: **ruído branco gaussiano**.

Intuição
Cada observação é "nova informação pura": não carrega informação sobre o passado nem sobre o futuro.

Importante: O ruído branco é o bloco de construção de todos os modelos ARMA.

Exemplo

Se a taxa de câmbio fosse ruído branco, nenhum operador de câmbio conseguiria lucro sistemático olhando o histórico.

Na prática, *retornos* de ativos são bem aproximados por ruído branco; os *níveis* não.

Processo AR(1)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t, \qquad u_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$$

Condição de estacionariedade

O AR(1) é **fracamente estacionário** se, e somente se, $|\phi_1| < 1$.

Propriedades (sob $|\phi_1| < 1$)

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{c}{1-\phi_1}, \qquad \mathrm{Var}(y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$$

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \phi_1^k \cdot \gamma_0$$

Exemplo

Inflação mensal: se a inflação de janeiro foi alta, a de fevereiro tende a ser também (inércia inflacionária). O AR(1) captura essa persistência.

$\phi_1 = 0.5$: metade do desvio da semana passada persiste hoje.

Se $|\phi_1| \geq 1$: variância diverge $\rightarrow$ processo não-estacionário.

Processo AR(p) e o Operador Lag

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

Operador lag: $L^i y_t = y_{t-i}$. Então:

$$\Phi(L)\, y_t = c + u_t, \qquad \text{com } \Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$

onde $\Phi(L)$ é o polinômio caracteristico do AR(p).

Condição de Estacionariedade – AR(p)

As raízes do polinômio característico $\Phi(z) = 0$ devem estar **fora do círculo unitário** $|z| > 1$ (equivalentemente, os *inversos* das raízes devem estar *dentro* do círculo).

Exemplo: AR(2) para o crescimento do PIB

$y_t = 0.4\, y_{t-1} + 0.2\, y_{t-2} + u_t$
Polinômio: $1 - 0.4z - 0.2z^2 = 0 \Rightarrow$ raízes fora do círculo $\Rightarrow$ **estacionário**.
Interpretação: crescimento do PIB neste trimestre depende dos dois anteriores.

Processo MA(1)

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}, \qquad u_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$$

Propriedade

O processo MA(1) é **sempre fracamente estacionário**, pois é uma combinação linear finita de um ruído branco.

Propriedades

$$\mathbb{E}[y_t] = \mu$$

$$\text{Var}(y_t) = (1 + \theta_1^2)\,\sigma^2$$

$$\gamma_k = \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \begin{cases} \theta_1 \sigma^2 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

Autocorrelação: $\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$

Exemplo

Erros de previsão do orçamento público: um choque inesperado na arrecadação afeta a previsão deste mês e ainda aparece no mês seguinte, mas depois desaparece.

Intuição: no MA(1), o efeito do choque dura apenas um período – memória curta.

Processo MA(q)

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots + \theta_q u_{t-q}$$

Propriedade

Todo processo MA(q) é **sempre fracamente estacionário**, pois é uma combinação linear finita de ruídos brancos contemporâneos e passados.

Propriedades gerais

$$\mathbb{E}[y_t] = \mu$$

$$\mathrm{Var}(y_t) = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2\right) \sigma^2$$

$$\gamma_k = \left(\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \theta_{k+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q \theta_{q-k}\right) \sigma^2, \quad k \leq q$$

$$\gamma_k = 0, \quad k > q$$

Exemplo

Choques temporários de oferta: uma greve, um problema climático ou um reajuste pontual de energia pode afetar a série por alguns períodos, mas o efeito desaparece depois.

No MA(q), o choque dura no máximo q **períodos**.

Processo ARMA(p,q)

$$y_t = \underbrace{c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p}}_{\text{componente AR}} + \underbrace{u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots + \theta_q u_{t-q}}_{\text{componente MA}}$$

Combina memória de **valores passados** (AR) com memória de **choques passados** (MA).

Estacionariedade

Determinada **somente pelo componente AR**: as raízes de $\Phi(z) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.
O componente MA não impõe restrições adicionais.

Exemplo

IPCA acumulado em 12 meses: combina inércia inflacionária do passado (AR) com resposta a choques de energia e câmbio (MA).

Propriedade: um processo AR(1) pode ser escrito como um MA(∞)

Considere um AR(1) **estacionário** ($|\phi_1| < 1$) com $u_t \sim \mathrm{RB}(0, \sigma^2)$:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t$$

Ideia: substituir y_{t-1} pela sua própria definição, depois y_{t-2}, e assim por diante.

Substituição recursiva

$$y_t = c + \phi_1 \underbrace{(c + \phi_1 y_{t-2} + u_{t-1})}_{y_{t-1}} + u_t$$

$$= c\,(1 + \phi_1) + \phi_1^2\, y_{t-2} + u_t + \phi_1 u_{t-1}$$

Substituindo agora $y_{t-2} = c + \phi_1 y_{t-3} + u_{t-2}$:

$$y_t = c\,(1 + \phi_1 + \phi_1^2) + \phi_1^3\, y_{t-3} + u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 u_{t-2}$$

Propriedade: um processo AR(1) pode ser escrito como um MA(∞)

Repetindo o procedimento n vezes, obtemos uma expressão com três blocos: a constante acumulada, o termo que sobra com y_{t-n}, e a soma dos choques passados.

Após n substituições – escrevendo termo a termo:

$$y_t \;=\; c\left(1+\phi_1+\phi_1^2+\cdots+\phi_1^{n-1}\right) \;+\; \phi_1^n\, y_{t-n}$$

$$+\, u_t+\phi_1\, u_{t-1}+\phi_1^2\, u_{t-2}+\cdots+\phi_1^{n-1}\, u_{t-(n-1)}$$

A mesma expressão, agora em notação compacta:

$$y_t \;=\; c\sum_{i=0}^{n-1}\phi_1^i \;+\; \phi_1^n\, y_{t-n} \;+\; \sum_{i=0}^{n-1}\phi_1^i\, u_{t-i}$$

AR(1) como MA(∞) – tomando o limite

Partindo da expressão obtida após n substituições:

$$y_t \;=\; c\sum_{i=0}^{n-1}\phi_1^i \;+\; \phi_1^n\, y_{t-n} \;+\; \sum_{i=0}^{n-1}\phi_1^i\, u_{t-i}$$

Sob a hipótese de estacionariedade $|\phi_1| < 1$, fazendo $n \to \infty$:

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\phi_1^i \;\longrightarrow\; \frac{1}{1-\phi_1}$ (soma da PG infinita)
- $\phi_1^n\, y_{t-n} \;\longrightarrow\; 0$ (em média quadrática, pois $|\phi_1|^n \to 0$)
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\phi_1^i\, u_{t-i} \;\longrightarrow\; \sum_{i=0}^{\infty}\phi_1^i\, u_{t-i}$

AR(1) como MA(∞)

Resultado: AR(1) = MA(∞)

$$\boxed{y_t = \underbrace{\frac{c}{1-\phi_1}}_{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \, u_{t-i}}$$

Ou seja, o AR(1) tem a forma de um MA(∞) com média $\mu = c/(1-\phi_1)$ e coeficientes $\theta_i = \phi_1^i$, que **decaem geometricamente** em i.

Demonstração *alternativa* via operador lag

Reescrevendo o AR(1) com o operador L:

$$y_t - \phi_1 L\, y_t \;=\; c + u_t \quad\Longleftrightarrow\quad (1-\phi_1 L)\, y_t \;=\; c + u_t$$

Sob $|\phi_1| < 1$, o polinômio $1 - \phi_1 L$ é invertível e

$$(1-\phi_1 L)^{-1} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i\, L^i,$$

em analogia à série geométrica $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ válida para $|x| < 1$.

Aplicando $(1-\phi_1 L)^{-1}$ dos dois lados:

$$y_t \;=\; (1-\phi_1 L)^{-1}(c + u_t) \;=\; \frac{c}{1-\phi_1} \;+\; \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i\, u_{t-i}$$

– mesmo resultado obtido pela substituição recursiva. ■

Interpretação econômica

Cada choque u_{t-i} continua afetando y_t, mas com peso ϕ_1^i que diminui geometricamente. Quanto maior ϕ_1 (mais perto de 1), **mais persistente** é o efeito de choques antigos sobre o presente.

Generalização: Teorema de Wold

Teorema de Wold

Todo processo $\{y_t\}$ **fracamente estacionário** admite uma representação única da forma

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \, u_{t-i},$$

em que:

- $\{u_t\}$ é um ruído branco com $\mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2$;
- os coeficientes $\{\psi_i\}$ satisfazem $\psi_0 = 1$ e $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.

Consequência: todo processo **AR(p)** – e, mais geralmente, todo **ARMA(p,q)** – *estacionário* admite uma representação MA(∞).

A demonstração feita aqui para o AR(1) é apenas o caso particular mais simples desse resultado geral. Não demonstraremos o teorema geral, pois sua prova formal foge ao escopo do curso.

ACF e PACF: o que são?

ACF — *Autocorrelation Function*

Mede a correlação entre y_t e sua defasagem y_{t-k}, **sem remover** o efeito dos lags intermediários.

$$\rho_k = (y_t,\, y_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Exemplo: a inflação de janeiro correlaciona com a de março em parte porque ambas passaram por fevereiro. A ACF inclui esse caminho indireto.

Como ler a ACF

$\rightarrow$ Indica a ordem do processo **MA**.

ACF corta após lag $q \Rightarrow$ provavelmente MA(q).

PACF — *Partial Autocorrelation Function*

Mede a correlação "direta" entre y_t e y_{t-k}, **controlando** os lags $y_{t-1}, \ldots, y_{t-k+1}$.

$$\phi_{kk} = (y_t,\, y_{t-k} \mid y_{t-1}, \ldots, y_{t-k+1})$$

Exemplo: a PACF de ordem 3 mede se há ligação direta entre a inflação de janeiro e a de outubro, *depois de remover* o efeito de novembro e dezembro.

Como ler a PACF

$\rightarrow$ Indica a ordem do processo **AR**.

PACF corta após lag $p \Rightarrow$ provavelmente AR(p).

Enunciado

Considere o processo $X_t = Y_t + 0{,}5\,Y_{t-1} - 0{,}2\,Y_{t-2}$, em que Y_t é ruído branco com $\mathbb{E}[Y_t] = 0$, $\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2$ e $\mathbb{E}[Y_t Y_s] = 0$ para $t \neq s$.

Julgue as afirmativas como **Verdadeiro (V)** ou **Falso (F)**:

(a) $\mathbb{E}[X_t] = 0$

(b) $\mathrm{Var}(X_t) = 1{,}29\,\sigma^2$

(c) $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = 0{,}4\,\sigma^2$

(d) $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) = 0$

(e) $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-3}) = 0$

X_t é MA(2) com $\theta_1 = 0{,}5$ e $\theta_2 = -0{,}2$.

(a) V $\mathbb{E}[X_t] =$
$\mathbb{E}[Y_t] + 0{,}5\ \mathbb{E}[Y_{t-1}] - 0{,}2\ \mathbb{E}[Y_{t-2}] = 0$

(b) V $\mathrm{Var}(X_t) = (1 + 0{,}5^2 + 0{,}2^2)\,\sigma^2 = 1{,}29\,\sigma^2$

(c) V $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\,\sigma^2$
$= (0{,}5 + 0{,}5 \cdot (-0{,}2))\,\sigma^2 = 0{,}4\,\sigma^2$

(d) F $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) = \theta_2\,\sigma^2 = -0{,}2\,\sigma^2 \neq 0$

(e) V MA(2): autocovariância é zero para lags $k > q = 2$.

Fórmula geral MA(q)

$$\gamma_k = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-k} \theta_j\theta_{j+k}\right)\sigma^2 & k \leq q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

com $\theta_0 = 1$.

Enunciado

Considere o processo $Y_t = 5 + e_t + 0{,}3\, e_{t-1}$, em que e_t é ruído branco com $\mathbb{E}[e_t] = 0$, $\mathrm{Var}(e_t) = \sigma^2$ e $\mathbb{E}[e_t e_s] = 0$ para $t \neq s$.

Julgue as afirmativas como **V** ou **F**:

(a) $\mathbb{E}[Y_t] = 5$

(b) $\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2$

(c) $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \dfrac{3\sigma^2}{10}$

(d) $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-3}) = 0$

(e) $(Y_t, Y_{t-1}) = \dfrac{1}{4}$

Y_t é MA(1) com média 5 e $\theta_1 = 0{,}3$.

(a) V $\mathbb{E}[Y_t] = 5 + \mathbb{E}[e_t] + 0{,}3\ \mathbb{E}[e_{t-1}] = 5$

(b) F $\mathrm{Var}(Y_t) = (1 + 0{,}3^2)\sigma^2 = 1{,}09\,\sigma^2$

(c) V $\gamma_1 = \theta_1\,\sigma^2 = 0{,}3\,\sigma^2 = \dfrac{3\sigma^2}{10}$ ✓

(d) V MA(1): $\gamma_k = 0$ para $k > 1$, portanto $\gamma_3 = 0$.

(e) F $\rho_1 = \dfrac{0{,}3}{1{,}09} \approx 0{,}275 \neq \dfrac{1}{4}$

Resumo MA(1)

$$\mathrm{Var} = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$$

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_k = 0, \quad k > 1$$

Atenção (b): confusão comum –

$\mathrm{Var}(Y_t) \neq \sigma^2$ sempre que $\theta_1 \neq 0$.

Enunciado

Considere o modelo AR(1):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + u_t, \qquad |\phi_1| < 1, \quad u_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$$

Julgue as afirmativas como **V** ou **F**:

(a) Y_t pode ser representado como $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \, u_{t-i}$

(b) $\mathbb{E}[Y_t] = 0$

(c) $\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma_u^2$

(d) Y_t tem distribuição normal

(e) $\mathrm{Cov}(Y_{t-1}, Y_{t-2}) = \phi_1^2 \, \sigma_u^2$

(a) V Substituições recursivas:
$Y_t = u_t + \phi_1 Y_{t-1} = u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 Y_{t-2} = \dots$
Sob $|\phi_1| < 1$ a série converge.

(b) V $\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \ \mathbb{E}[u_{t-i}] = 0$ (constante $c = 0$ no modelo)

(c) F $\mathrm{Var}(Y_t) = \dfrac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} \neq \sigma_u^2$ (exceto se $\phi_1 = 0$)

(d) V Y_t é combinação linear infinita de normais iid $\Rightarrow$ normal.

(e) F $\mathrm{Cov}(Y_{t-1}, Y_{t-2}) = \phi_1 \ \mathrm{Var}(Y_t) = \dfrac{\phi_1 \, \sigma_u^2}{1-\phi_1^2}$

A alternativa diz $\phi_1^2 \sigma_u^2$, que estaria errada.

Resumo AR(1) estacionário

$$\mathbb{E}[Y_t] = \frac{c}{1-\phi_1}$$

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2}$$

$$\gamma_k = \phi_1^k \cdot \mathrm{Var}(Y_t)$$

$$\rho_k = \phi_1^k$$

Resumo da aula

Conceitos revisados

- Processo estocástico vs. série temporal
- Estacionariedade fraca (3 condições)
- Ruído branco
- AR(1), AR(p): condição das raízes
- MA(1), MA(q): sempre estacionário
- ARMA(p,q): combinação de AR(p) e MA(q)
- ACF e PACF: leitura e interpretação

Para a próxima aula

- Processos não-estacionários
- Passeio aleatório (*random walk*)
- Efeitos permanentes de choques
- Diferenciação e processo I(1)
- Teste ADF

Takeaway:
Num processo estacionário, choques são **temporários**.
Num não-estacionário, são **permanentes**.

Dúvidas?

Próxima aula: Processos Não Estacionários